

Apuntes [esbozo] de Métodos Matemáticos de la Ingeniería, I

Pedro Fortuny Ayuso

Febrero-Junio 2009

Correo electrónico: fortunypedro@uniovi.es

Índice

Introducción general a la asignatura	5
1. Objetivos ejemplificados	5
1.1. ¿Qué significa el amplificador de Winamp?	5
1.2. ¿Por qué la música se escribe con notas?	5
1.3. ¿Cómo se mueve un muelle sujeto a fuerzas en los extremos?	5
1.4. Longitud de un muelle cónico	5
1.5. Volumen de sólidos	6
1.6. Momento de inercia	6
Capítulo 1. Series de Fourier	7
1. Introducción	7
2. Series de funciones	7
2.1. El sistema RGB de fotografía digital	7
2.2. Primeras definiciones	8
2.3. Idea gráfica no formal: interpretación de las sumas parciales	13
2.4. Aproximación en media	18
2.5. Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval-Liapunov	19
2.6. Convergencia de la serie de Fourier a la función	20
2.7. El fenómeno de Gibbs	21
3. Series de funciones, trigonométricas	21
4. Cálculo de los coeficientes	21
5. Interpretación de las sumas parciales	21
6. Desviación cuadrática media y convergencia	21
7. Algunas simplificaciones y modificaciones	21
7.1. Cambio de intervalo	22
7.2. Funciones pares e impares	23
7.3. Funciones de periodo $2l$	23
7.4. Funciones no periódicas definidas en intervalos: “periodización”. Desarrollos en senos y cosenos	24
8. Problemas y ejemplos	26
9. El problema de Sturm-Liouville	26
9.1. El oscilador armónico simple	26
9.2. El problema general de Sturm-Liouville	28
9.3. Ejemplos	29
Capítulo 2. Integración en Varias Variables	33
1. Introducción	33

2. Bases de la integración, el teorema de Fubini	34
2.1. Integrales en cubos	35
2.2. Conjuntos que no son cubos	36
2.3. Propiedades elementales	37
2.4. Cálculo de integrales. El teorema de Fubini	39
3. El teorema del cambio de variable	41
3.1. Aplicaciones diferenciables 1 – 1	41
3.2. Idea	42
3.3. Enunciado y ejemplos	45
4. Cambios de variable notables	46
4.1. El cambio a polares	47
4.2. Coordenadas cilíndricas	49
4.3. Coordenadas esféricas	50
5. Simetrías del conjunto, paridad de la función	50
5.1. Dimensión 2	50
5.2. Dimensión 3	51
5.3. Cuerpos de revolución	52
6. Medias, momentos, volúmenes...	52
6.1. Momentos en dimensión 2	53
6.2. Momentos en dimensión 3	54
6.3. Áreas y volúmenes	54
7. Problemas y ejemplos	55
Capítulo 3. Campos Vectoriales, curvas, superficies...	57
1. Curvas	57
2. Superficies	59
3. Campos de vectores y su integración	60
3.1. El operador Nabla	62
4. Anexo topológico	63
5. El teorema de Stokes	65
6. Consecuencias y otras propiedades	66
Referencias	69

Introducción general a la asignatura

Trataremos de hacer la asignatura lo más agradable posible.

1. Objetivos ejemplificados

Vamos a proponer unos cuantos problemas para que ilustrar qué se pretende hacer en esta asignatura; algunos los resolveremos a lo largo del cuatrimestre, otros no.

1.1. ¿Qué significa el amplificador de Winamp? Cuando escucháis un *mp3* en Winamp (o en cualquier reproductor que se precie), se tiene la opción de que os muestre un “amplificador” (o incluso un “espectro” tridimensional, bastante interesante). ¿Qué es esto y qué significa? ¿Qué hacen las barritas subiendo y bajando?

1.2. ¿Por qué la música se escribe con notas? Esto es *en cierto modo y manera* directamente un ejemplo de aplicación de las series de Fourier mucho antes de que se conocieran, y sin pretensiones de exactitud.

1.3. ¿Cómo se mueve un muelle sujeto a fuerzas en los extremos? Problema clásico que es fácil de plantear (no es más que la Ley de Hook y la Segunda Ley de Newton: $F = ma$). En concreto, dado un muelle fijo por arriba, con un peso de masa m en el extremo y sujeto por el otro a una fuerza $f(t)$ —que depende del tiempo—, la ecuación del movimiento de la masa es:

$$(1) \quad m\ddot{y} + ky = f(t)$$

que es fácil de resolver en unos casos, difícil en otros y muy fácil si se utilizan series de Fourier (y la función f es sencilla).

1.4. Longitud de un muelle cónico. Se nos da un cono (que puede ser un cilindro) y se traza en él una curva espiral siguiendo una determinada fórmula. ¿Cuál es la longitud de esta curva? Por ejemplo, la longitud de una cuerda (o un cable) que se tira por un monte hacia la cima, o de una carretera que sube una montaña.

1.5. Volumen de sólidos. ¿Cuánta agua cabe en una antena parabólica? Si esto parece menos interesante, ¿Cuál es el volumen de un balón de Rugby? ¿Cuál es el volumen de un petrolero? Esto quizás sea más realista.

¿Cómo se calcula el área de una esfera? Esto sirve para saber cuánta pintura necesito para pintar 3000 canicas, que es un problema real: ¿tengo que comprar 1000 litros ó solo 850? O si las canicas son huecas (para que floten), ¿cuánto plástico necesito?

1.6. Momento de inercia. El momento de inercia puede parecer poco útil *per se*, pero con él se puede calcular, por ejemplo, desde qué distancia se tuvo que disparar una bala para atravesar un cuerpo o una superficie hasta determinada distancia.

CAPÍTULO 1

Series de Fourier

1. Introducción

Cuando Beethoven compone la 9ª Sinfonía y cuando Roger Waters y David Gilmour componen *Wish you were here*, no tienen que “hacer una grabación entera” para que luego la gente se aprenda de memoria todo lo que ocurre en cada instante. Lo que hacen es algo completamente distinto: en ambos casos se describe completamente lo que se ha de escuchar mediante una nomenclatura específica, que indica *exclusivamente* qué sonido tiene que hacer cada instrumento. Y si se piensa bien, lo que se especifica es *qué onda* ha de (intentar) producir cada instrumento (también la voz humana). En cierto modo, cada instante de *Wish you were here* y cada momento de la 9ª es una superposición de sonidos *básicos* (notas, no hay más que un número discreto de notas, en un piano 88 y es posiblemente el más cromático), que podríamos interpretar como “ondas básicas”. Es *una suma*. Además, no solo importa si se suma, por ejemplo, el oboe o el bajo eléctrico, importa también si lo hace “piano” ó “fuerte”. Puede entrar un poco más fuerte y la canción se hace estridente, o un poco más bajo y “no se oye”... Esta “intensidad” es como un “coeficiente” que se aplica a cada instrumento. Así pues, un instante de una melodía podría decirse que es una *combinación lineal* de ondas “básicas”: se puede hacer vibrar una cuerda en sus modos solo, no en modos “fraccionarios” ni “irracionales”.

Es decir: una melodía es (en cada momento) una suma de ondas básicas con una determinada proporción (lo que ocurre es que en todo esto el *tímbre* de cada instrumento es crucial: no es lo mismo que un fagot haga un Do, que que lo haga un violín).

En realidad esa es la idea que hay que tener en la cabeza (aunque no sea ni exactamente correcta ni necesariamente precisa) cuando se estudian las series de Fourier: no se está intentando más que “escribir” una vibración como una combinación de todas las posibles ondas básicas (frecuencias 1, 2, 3, ... y por tanto energías cada vez mayores).

2. Series de funciones

Para terminar con los ejemplos, creo que otra idea gráfica puede ayudaros a entender por qué son importantes las series de funciones.

2.1. El sistema RGB de fotografía digital. Cuando se hace una foto digital, si se utilizara una descomposición RGB (que no es lo que se

hace), la memoria del dispositivo se podría pensar como en una secuencia de bytes como una línea de $1024 \times 768 = 786432$ bytes para cada color básico (rojo, verde, azul, así pues, tres líneas muy largas de todos esos bytes). En cada byte se almacena un valor de 8 bits (de 0 a 256).

Para representar un pixel, y esta es la idea “genial”, se utiliza una función (r para rojo, g para verde, b para azul):

$$(2) \quad r_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [i, i+1) \\ 0 & \text{si } x \notin [i, i+1) \end{cases}$$

de manera que, si queremos expresar que en el primer pixel hay una cantidad

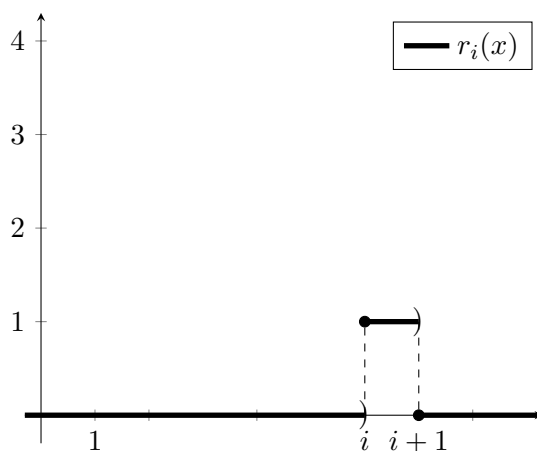


FIGURE 1. Función básica “rojo en i ”

de rojo de 80 y en el segundo de 72, en el 838 hay una cantidad de 255 y en el resto de pixeles no hay rojo, escribimos (utilizando el convenio de los informáticos de comenzar a contar en 0):

$$80r_0 + 72r_1 + 255r_{837}$$

(lo mismo pero para el verde y para el azul).

Es decir, una fotografía no es más que

una combinación lineal de rojos, otra de verdes y otra de azules

(es un espacio *tridimensional*). Cada foto es una suma de funciones. Las funciones “básicas” solo sirven para decir si un pixel tiene o no rojo, y no dicen nada más de los demás. En este sentido pasa lo mismo con la notación musical: cada nota especifica un “sonido” (que está o no está), y no dice nada del resto. Esto se denomina “ortogonalidad”.

2.2. Primeras definiciones.

DEFINICIÓN 2.1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *periódica* de periodo l si $f(x+l) = f(x)$ para todo x .

Se suele tomar como periodo el mínimo número l para el que se cumple la igualdad (una función de periodo 2 es también de periodo 4).

DEFINICIÓN 2.2. Dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables son *ortogonales* si

$$\int_a^b fg \, dx = 0$$

La noción de *ortogonalidad* es equivalente en este contexto y solo en cierto modo a la idea de “independencia” mutua (que esté una no significa que esté o no la otra función): que haya un Do de los oboes no quiere decir que haya o no haya un Mi de los mismos oboes. Una no da información respecto de la otra (esto *es impropio, pero cierto*). Las funciones definidas arriba para los pixeles son ortogonales, como se puede comprobar.

DEFINICIÓN 2.3. Una función f real de variable real es *par* si $f(x) = f(-x)$ para todo x y es *impar* si $f(x) = -f(-x)$ para todo x .

TEOREMA 2.4. Sean f y g funciones reales de variable real. Entonces:

- Si f y g son pares, entonces $f + g$ y fg son pares.
- Si f y g son impares, entonces $f + g$ es impar y fg es par.
- Si f es par y g es impar, entonces fg es impar.

Por otro lado, si a es un número real, entonces

- Si f es par, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
- Si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

2.2.1. Ejemplos.

Ejemplo 1. Las funciones de ondas (trigonométricas) son bien pares, bien impares:

- La función cosenoidal de frecuencia n , $f(x) = \cos nx$ es *par*.
- La función senoidal de frecuencia n , $f(x) = \sin nx$ es *impar*.

Ejemplo 2. Sorprendentemente, toda función (sea lo rara que sea) se puede expresar como suma de una función par y una función impar. Esto se puede expresar diciendo que “el espacio vectorial generado por las funciones pares y las impares es el total”:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

y el primer término es par y el segundo impar.

Ejemplo 3. El ejemplo anterior es muy fácil de comprobar con polinomios: puesto que las potencias pares x^{2k} de x son funciones pares y las impares x^{2k-1} son funciones impares,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_mx^m$$

se escribe como suma de función par y función impar como sigue:

$$P(x) = \left(a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} \right) + \left(a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2k-1}x^{2k-1} \right)$$

Ejemplo 4 (Funciones periódicas). Las siguientes funciones son periódicas:

Constantes: Es evidente que las funciones constantes $f(x) = k$ son periódicas, pero *el periodo puede ser cualquier número real*.

Trigonométricas: Las funciones $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ y en general todas las trigonométricas, son periódicas de periodo 2π . Las funciones $\cos 2x$ y $\sin 2x$ son periódicas de periodo π . ¿Qué periodo tienen las funciones $\cos nx$ y $\sin nx$ donde n es un número natural? ¿y si n es un número real cualquiera?

Combinaciones: Es muy sencillo comprobar que cualquier combinación (suma, producto, etc. . .) de funciones periódicas *del mismo periodo* l , es periódica. ¿Qué pasa si tienen periodos distintos? Pues depende de si son “resonantes” o no, estos periodos (su dependencia o independencia lineal sobre \mathbb{Q}).

Ejemplo 5 (Funciones ortogonales). Las siguientes familias de funciones son ortogonales. Es decir, dados dos elementos f, g de la misma familia *que no sean el mismo*, se tiene que f y g son ortogonales.

Funciones escalón: Si r_i está definida por

$$r_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [i, i + 1) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

entonces r_i y r_j son ortogonales siempre que $i \neq j$. Esto es sencillo de comprobar.

Seno y coseno: Las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son ortogonales. La demostración de esto es una consecuencia inmediata de la igualdad $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ y de que la integral simétrica de una función impar es cero (Teorema 2.4).

Polinomios ortogonales: Se puede construir una familia de polinomios de grados $0, 1, 2, \dots$ *definidos en el intervalo* $[0, 1]$, tal que cualesquiera dos elementos distintos son ortogonales. En concreto:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x - \frac{1}{2}, P_2(x) = a + bx + cx^2$$

¿cuánto han de valer a, b, c para que la familia sea ortogonal? Hay que imponer que P_2 sea ortogonal a P_1 y a P_0 . Para P_1 queda

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (ax + bx^2 + cx^3)dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (a + bx + cx^2)dx = \\ &= \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} - \frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{c}{6} = \\ &= \frac{b+c}{12} \end{aligned}$$

mientras que para P_0 :

$$0 = \int_0^1 (a + bx + cx^2)dx = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

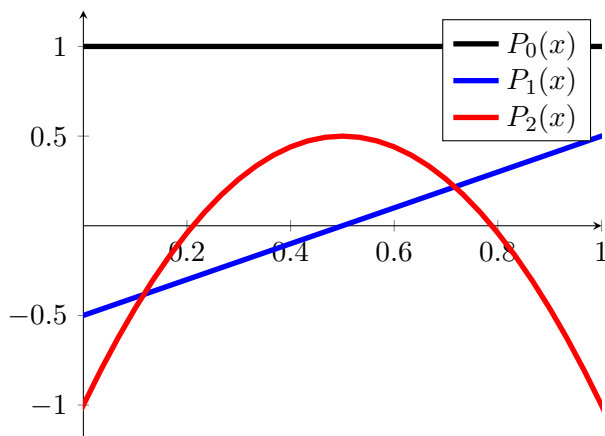


FIGURE 2. Polinomios ortogonales

Es decir, se ha de resolver el sistema

$$\begin{aligned} b + c &= 0 \\ a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} &= 0 \end{aligned}$$

que tiene infinitas soluciones (es un sistema compatible *indeterminado*). Podemos tomar, por ejemplo, $a = -1, b = 6, c = -6$.

Senos y Cosenos: Las funciones $\sin nx$ y $\cos mx$ son todas ellas mutuamente ortogonales. Esto lo probamos en el resultado siguiente.

TEOREMA 2.5. *Las funciones 1, $\sin nx$ y $\cos mx$ definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ son todas ellas mutuamente ortogonales.*

DEMOSTRACIÓN. Que 1 es ortogonal a todos los senos y cosenos debería ser fácil.

Por otro lado, las funciones $f(x) = \sin nx \cos mx$ son impares y por el teorema 2.4, su integral simétrica es 0, así que $\sin nx$ y $\cos mx$ son ortogonales para todo n, m .

Finalmente, obsérvese que $\sin nx \sin mx = \cos(n+m)x - \cos nx \cos mx$, de donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

y la primera integral es siempre cero (compruébese; es porque sale un $\sin(n+m)x$ que en $-\pi$ y π es 0). Ahora bien,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \\ & \left[\begin{array}{l} u = \cos mx \\ dv = \cos nx \, dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = -m \sin mx \, dx \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] \\ & = \frac{1}{n} \cos mx \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \\ & = 0 + \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx \end{aligned}$$

Así que, conectando el principio del problema con el final, queda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = -\frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

Lo que, cuando $m \neq n$ solo es posible si la integral es cero. Un razonamiento análogo sirve para probar que $\cos nx$ y $\cos mx$ son ortogonales si $n \neq m$. Se deja como ejercicio el calcular las integrales de $\sin^2 nx$ y $\cos^2 mx$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. \square

Nuestro propósito (el del tema de las series de Fourier) es *escribir cualquier sonido (vibración periódica) como suma de ondas senoidales y cose-noidales de todas las frecuencias*. Visto que las ondas de las frecuencias enteras (las ondas con periodo 2π) son ortogonales, ahora queremos saber si cualquier “sonido” puede expresarse como *combinación lineal de todas estas ondas ortogonales*. Es decir, nos gustaría saber si es cierto que, dada una función $f(x)$ periódica de periodo 2π , se puede escribir como

$$f(x) = K + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots$$

La respuesta es que sí, pero no es fácil de probar.

Antes de llegar a eso, supongamos que una función *ya es* escribible como “suma finita” de Fourier, es decir, tomemos una función que *ya sabemos que es suma de ondas de frecuencias enteras*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

entonces

TEOREMA 2.6. *Por una parte,*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

Y por otra,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

para $k = 1, \dots, n$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede quedar esbozada porque no es más que una cuenta, consecuencia de las propiedades de las funciones pares e impares (Teorema 2.4), la ortogonalidad de las funciones senoidales y cosenoidales (Teorema 2.5) y algo más. \square

El $\frac{1}{\pi}$ que aparece viene de utilizar el periodo tan grande; si el periodo fuera 2 (es decir, si trabajáramos en $[-1, 1]$), la fórmula quedaría “redonda”.

Visto que una suma de senos y cosenos se comporta así de fácilmente, podemos generalizar esos números que calculamos a cualquier función:

DEFINICIÓN 2.7. Dada una función f real de variable real, *periódica de periodo* 2π , se definen sus *coeficientes de Fourier*:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned}$$

Y se denomina *serie de Fourier de $f(x)$* a la serie¹

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

y escribiremos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

2.3. Idea gráfica no formal: interpretación de las sumas parciales. Las sumas parciales de Fourier

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

representan la combinación de “modos” o “tonos básicos” de la vibración dada por $f(x)$, cuando solo se miran los “tonos” de las primeras n frecuencias. El ejemplo más clásico es el del *pulso puntual*, que ponemos por comodidad entre -1 y 1 :

Ejemplo 6 (El escalón de Heaviside). Este es un ejemplo esencial en teoría de la señal. La función “escalón de Heaviside” de amplitud a la definimos como la función definida en $[-\pi, \pi]$ por las condiciones

$$f(x) = \begin{cases} -a & \text{si } x < 0, \\ a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¹Esto no es *stricto sensu* una serie, sino una serie de funciones, etc.

Dibujo del escalón de amplitud a

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \stackrel{[f \text{ es impar}]}{=} 0$$

Lo mismo pasa con el resto de a_k , pues el producto de una función par por una impar es impar:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \stackrel{[\text{integrando impar}]}{=} 0$$

El cálculo de los b_k no es trivial pero sí fácil:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \stackrel{[\text{par}]}{=} \\ &\stackrel{[\text{par}]}{=} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-a) \sin kx dx + \int_0^{\pi} a \sin kx dx \right) = [\dots] = \\ &= \frac{-2a(\cos(k\pi) - \cos(0))}{k\pi} \end{aligned}$$

y el coseno de $k\pi$ es alternativamente, $-1, 1$, comenzando en 1 con $k = 0$. Así pues, los coeficientes de Fourier del escalón de Heaviside de amplitud 1 son

$$a_n = 0 \text{ para todo } n \text{ y } b_n = \begin{cases} \frac{4a}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Y la serie de Fourier asociada al escalón de Heaviside es

$$f(x) \sim \frac{4a}{\pi} \sin x + \frac{4a}{3\pi} \sin 3x + \dots + \frac{4a}{(2k-1)\pi} \sin kx + \dots$$

Ejemplo 7. Consideremos la función correspondiente a un impulso “continuado” uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \alpha x$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es no nulo, (y “repetida” como una función periódica). Calculemos sus coeficientes de Fourier. La función es impar, así que el producto $f(x) \cos kx$ es impar y por tanto de integral nula entre $-\pi$ y π . Luego, los a_k son todos 0 (esta es la gran ventaja de las funciones pares/impares en este contexto).

Para calcular el resto de los coeficientes, hacemos las integrales (extraemos α desde el principio):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \\ &\left[\begin{array}{l} u = x \quad \left| \quad du = dx \\ dv = \sin kx dx \quad \left| \quad v = \frac{-1}{k} \cos kx \end{array} \right. \right] \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{-1}{k} x \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 1k \cos kx dx \right) \end{aligned}$$

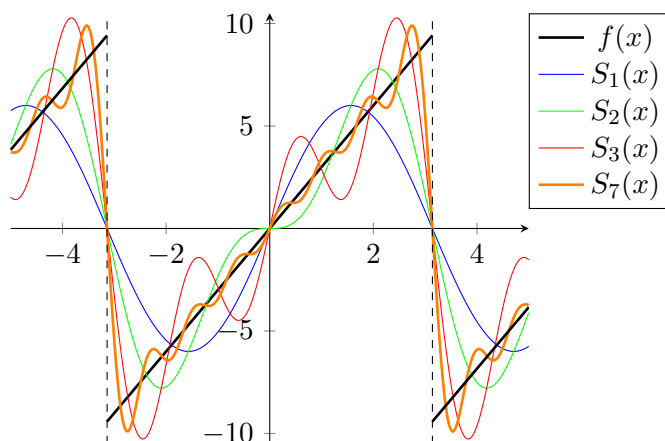


FIGURE 3. Primeras sumas parciales de Fourier de una función.

El segundo término se ve fácilmente que es 0, así que (y aquí hay que tener *mucho cuidado* con los signos):

$$b_k = \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{-1}{k} \pi \cos k\pi - \frac{-1}{k} \pi \cos -k\pi \right) = \frac{2}{k} \times (-1)^{k+1}$$

Y, por tanto, el desarrollo de Fourier de f es

$$f(x) \sim 2\alpha \sin x - \alpha \sin 2x + \frac{2\alpha}{3} \sin 3x + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{k} \times (-1)^{k+1} \sin kx$$

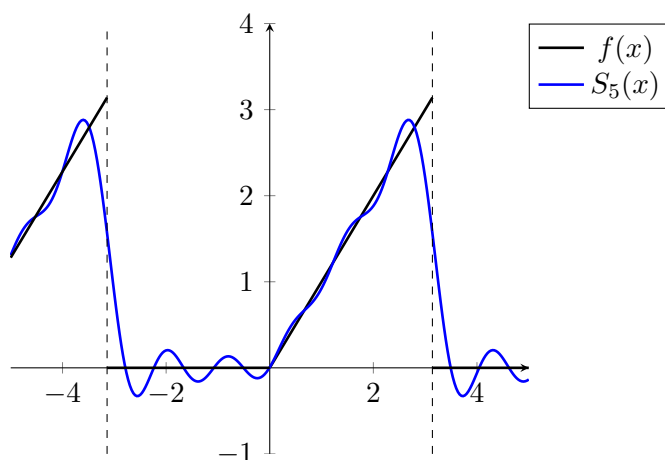
que no tiene cosenos (nótese que la función f es impar).

Ejemplo 8. Consideremos la función f definida en $[-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Los coeficientes de Fourier de f se calculan según la definición:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \stackrel{[\text{probarlo}]}{=} \frac{1}{2}$$

FIGURE 4. Primeras sumas parciales de Fourier de $f(x)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \\
 &\left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos kx \, dx & v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} x \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right) = \\
 &= \frac{1}{k\pi} (0 + \cos k\pi - \cos 0) = \\
 &= \begin{cases} -2/(k^2\pi) & \text{para } k \text{ par} \\ 0 & \text{para } k \text{ impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Una cuenta similar prueba que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \begin{cases} -1/n & \text{para } n \text{ impar} \\ 1/n & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Y la serie de Fourier es:

$$\begin{aligned}
 f(x) \sim & \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \\
 & + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Finalmente, calculemos los coeficientes de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \beta x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(extendida de manera periódica).

Ejemplo 10. Calulemos los coeficientes de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -a & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x^2 & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

suponiendo que $a > 0$, extendida periódicamente a todo \mathbb{R} .

La función no es ni par ni impar, así que hay que calcular todos sus coeficientes de Fourier. Como está definida a trozos, haremos todas las integrales en los dos trozos, $[-\pi, 0]$ y $[0, \pi]$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -a dx - \int_0^{\pi} x^2 dx \right) = (\dots) = -a + \frac{\pi^2}{3}$$

Los demás coeficientes a_k se calculan

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -a \cos kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx \right)$$

La primera integral es sencilla, la segunda, como siempre, se hace por partes:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(-a \sin kx \Big|_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx \right)$$

El primer término entre paréntesis es 0 (fácil), el segundo es el que requiere integración por partes:

$$\left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad | \quad du = 2x dx \\ dv \cos kx \quad | \quad v = \frac{\sin kx}{k} \end{array} \right]$$

de donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right) = \frac{-2}{\pi k} \left(\int_0^{\pi} x \sin kx dx \right)$$

Esta última integral también se hace por partes

$$\left[\begin{array}{l} u = x \quad | \quad du = dx \\ dv \sin kx \quad | \quad v = \frac{-\cos kx}{k} \end{array} \right]$$

por tanto (cuidado con todos los signos que aparecen y desaparecen)

$$a_k = \frac{2}{\pi k} \left(x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right) = \frac{2}{\pi k} \left(\frac{(-1)^k}{k} \right)$$

(la segunda integral es 0). Así pues,

$$a_k = \frac{2 \cdot (-1)^k}{\pi k^2}$$

El cálculo de los b_k es igualmente tedioso,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -a \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \right)$$

La primera integral es inmediata, para la segunda hacemos otra vez una integración por partes,

$$\left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad | \quad du = 2x dx \\ dv \sin kx \quad | \quad v = \frac{-\cos kx}{k} \end{array} \right]$$

así que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-a}{k} \cos kx \Big|_{-pi}^0 + \frac{1}{k} \left(-x^2 \cos kx \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos kx dx \right) \right)$$

Haciendo los cálculos, queda

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{k} ((-1)^{k+1} + 1) + \frac{\pi^2 (-1)^{k+1}}{k} + \frac{2}{k} \left(\int_0^\pi x \cos kx dx \right) \right)$$

Otra vez integrando por partes

$$\left[\begin{array}{l} u = x \quad | \quad du = dx \\ dv \cos kx \quad | \quad v = \frac{\sin kx}{k} \end{array} \right]$$

la última integral queda

$$\frac{2}{k} \left(\int_0^\pi x \cos kx dx \right) = \frac{2}{k} \left(x \sin kx \Big|_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin kx dx \right) = \frac{2}{k^3} ((-1)^k - 1)$$

y por tanto,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\frac{a ((-1)^{k+1} + 1)}{k} + \frac{\pi^2 (-1)^{k+1}}{k} + \frac{2 ((-1)^k - 1)}{k^3} \right)$$

expresión que no vamos a simplificar más.

2.4. Aproximación en media. De hecho, los números (coeficientes) que acabamos de definir son óptimos en dos sentidos. Por un lado, como veremos después, hacen que la serie $S_n(x) = \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ converja hacia $f(x)$ “casi siempre” y por otro, que es lo que nos importa ahora, son los que *minimizan el error medio* entre la suma de Fourier y la función.

La definición de error medio es clásica y es importante que la tengáis entre vuestros “conceptos matemáticos”.

Ejemplo 11. Ejemplo gráfico de funciones que aproximan a otra, una bien salvo en una zona pequeña y otra regular.

Dadas dos funciones f, g reales definidas en un intervalo $[a, b]$, la desviación cuadrática media es *la media de las distancias al cuadrado*. Esto es:

$$(3) \quad \delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$$

(Como es al cuadrado y las funciones son reales, daría lo mismo poner paréntesis, pero es mejor poner módulos por si las funciones fueran complejas).

Lo que representa esa integral es la media de las “distancias al cuadrado”, que en términos estadísticos es la “varianza”. Si ahora sustituimos $g(x)$ por

la suma finita de Fourier, sale (lo llamamos δ_n^2 porque lo vamos a usar más adelante):

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 dx$$

La propiedad de los coeficientes de Fourier relevante ahora es:

TEOREMA 2.8. *Los coeficientes de Fourier minimizan la desviación cuadrática media de una serie de Fourier y f . Es decir, si c_0, c_k, d_k son números reales para $k = 1, \dots, n$, y $\tilde{S}(x)$ es la suma trigonométrica*

$$\tilde{S}_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

entonces la desviación cuadrática media

$$\tilde{\delta}_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \tilde{S}_n(x))^2 dx$$

es mínima si y solo si $c_i = a_i$ y $d_i = b_i$ para todo i , donde a_i y b_i son los coeficientes de Fourier de f .

De hecho, si uno echa las cuentas, al final le queda que

$$(4) \quad \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Pero no solo ocurre eso, que es algo bueno (los coeficientes de Fourier tienen un sentido interesante respecto de la función), sino que las sumas parciales de Fourier *convergen* a la función, en un sentido preciso (no en todos los puntos).

2.5. Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval-Liapunov.

Vamos a enunciar sin demostrar un par de resultados.

TEOREMA 2.9 (Desigualdad de Bessel). *Si $f(x)$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ y a_n, b_n son sus coeficientes de Fourier, entonces*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

La prueba es una mera cuenta una vez que conocemos que la variación cuadrática media de las sumas parciales viene dada por la ecuación (4). Pues ese número es positivo y la integral de una función al cuadrado es un número positivo. De ahí que la integral sea una cota de las sumas parciales y, por tanto, de la serie.

TEOREMA 2.10 (Igualdad de Parseval). Si $f(x)$ es de cuadrado integrable (el significado de lo cual es irrelevante, “en el caso general”), se tiene la igualdad

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Nótese que de la desigualdad de Bessel (para la que basta con que $f(x)$ sea integrable) se deduce que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ y que $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Es decir: los coeficientes de Fourier son “cada vez más pequeños”. Esto tiene una interpretación física que lo apoya: una función integrable no representa más que una vibración “limitada”. Lo que no podría ocurrir es que una vibración “limitada” sea una combinación de energías “no limitada” (la energía, cuando se calcula en el dominio de las frecuencias —en el espectro—, no es más que la suma de los cuadrados de los coeficientes de Fourier, el primer miembro de la desigualdad de Bessel).

La igualdad de Parseval los físicos la enuncian diciendo que *la energía es la misma en el dominio del tiempo que en el dominio de la frecuencia*.

Téngase en cuenta que el hecho de que los coeficientes de Fourier converjan *no significa* que sean decrecientes. Piénsese en un sonido, que puede tener mayor amplitud en “los agudos” que “en los graves” (y por tanto sus coeficientes de Fourier en las frecuencias altas serían mayores que en las bajas). Sí ocurre que “en el infinito” se hace cero, pero hay sucesiones que convergen a cero pero *no son decrecientes*.

2.6. Convergencia de la serie de Fourier a la función. Para estudiar la convergencia de la serie de Fourier asociada a una función, vamos a restringirnos a funciones “que se comportan bien”, para no cargar la notación.

DEFINICIÓN 2.11. Una función $f(x)$ real de variable real se dice que es *continua a trozos* en el intervalo $[a, b]$ si existe un conjunto *finito* de puntos $a_1, \dots, a_n \in [a, b]$ tal que f es continua en todos los puntos menos eventualmente en los a_i .

DEFINICIÓN 2.12. Una función $f(x)$ real de variable real se dice que es *monótona a trozos* en el intervalo $[a, b]$ si existe un conjunto finito de puntos $a = a_1, \dots, a_n = b \in [a, b]$ tal que $f(x)$ es monótona en $[a_i, a_{i+1})$ para todo i .

Si $f(x)$ es monótona a trozos (o continua a trozos) en $[a, b]$ y *acotada*, entonces las únicas discontinuidades que puede tener son *de salto* (de “primera especie”) ó *evitables* (los límites direccionales coinciden pero el valor de la función es el mismo).

Con toda esta notación, se tiene el siguiente resultado

TEOREMA 2.13. *Si $f(x)$ es una función periódica de periodo 2π , monótona a trozos (o continua a trozos) en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y $S(x)$ es la serie de Fourier de f (es decir, $f(x) \sim S(x)$), entonces*

- Si $t \in [-\pi, \pi]$ es un punto de continuidad de f (no es un salto), la serie $S(t)$ converge a $f(t)$: $S(t) = f(t)$.
- Si $t \in [-\pi, \pi]$ es un punto de discontinuidad y $f(t^-)$ y $f(t^+)$ son el límite por la derecha y por la izquierda de f en t , entonces $S(t)$ converge al valor medio de $f(t^-)$ y $f(t^+)$: $S(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$.
Nótese que el valor de la función en el punto es irrelevante.

Cualquier función que verifique las condiciones del Teorema 2.13 se dice que *admite desarrollo de Fourier ó representable en serie de Fourier*.

Este resultado es de “gran utilidad” para calcular sumas de series “raras”. ■

Ejemplo 12. Tomando $f(x)$ igual al escalón de Heaviside de altura 1, se tiene que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{defin.}}{=} 1 \stackrel{\text{converg.}}{=} \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

de donde

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{\pi}{4}$$

2.7. El fenómeno de Gibbs. Siempre que se tiene una serie de funciones que converge, la gran pregunta es *¿cómo converge?*. Uno se refiere a si “es igual de rápido en todas partes” o si puede haber “grandes diferencias”. El caso de las series de Fourier no es ajeno a este problema. El hecho relevante es que la convergencia de la serie de Fourier a la función original *es muy rápida* salvo en los puntos de discontinuidad, “cerca” de los que aparecen diferencias notables. Esto se denomina *fenómeno de Gibbs* y genera “chasquidos” casi inevitables cada vez que una función no continua se aproxima por una serie de Fourier.

Ejemplo 13. Ejemplo de fenómeno de Gibbs $f(t) = -1$ para $t \in [-\pi, 0)$ y $f(t) = 1$ para $t \in [0, \pi]$.

Sin embargo, si la función es continua, la convergencia es uniforme y muy rápida (es decir, la serie de Fourier aproxima muy bien cualquier función continua).

3. Series de funciones, trigonométricas

4. Cálculo de los coeficientes

5. Interpretación de las sumas parciales

6. Desviación cuadrática media y convergencia

7. Algunas simplificaciones y modificaciones

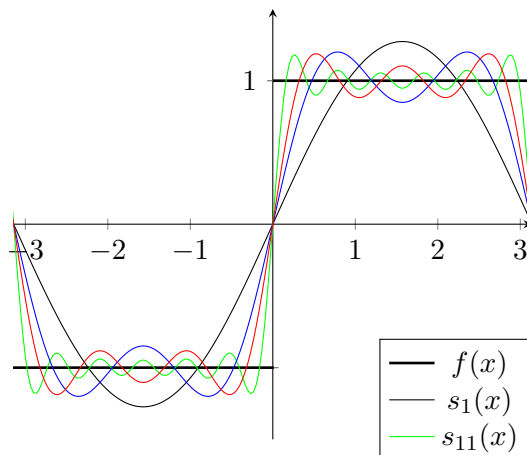


FIGURE 5. Fenómeno de Gibbs en el escalón de Heaviside

El estudio que hemos hecho de los desarrollos de Fourier hasta ahora es bastante limitado por utilizar siempre el intervalo $[-\pi, \pi]$ y funciones periódicas en él. Todo se puede extender a otros periodos y a funciones definidas en intervalos pero que no sean periódicas. Es lo que abordamos a continuación.

7.1. Cambio de intervalo. Una función periódica lo es “siempre”, da igual a partir de cuándo miremos si lo es o no. De aquí que la integral en un periodo no varíe empecemos a integrar donde empecemos.

TEOREMA. Si $f(x)$ es periódica de periodo 2π , entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx$$

para cualquier λ .

Y por eso mismo, los coeficientes de Fourier se pueden calcular empezando a integrar en cualquier sitio (si f y g son periódicas de periodo 2π entonces fg es periódica de periodo 2π , claramente). Así pues, si $f(x)$ es periódica de periodo 2π , entonces

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases}$$

para cualquier λ (nótese que *no hay que cambiar variables ni nada*, como habrá que hacer luego al cambiar el periodo).

Ejemplo 14. Hallar la transformada de Fourier de la función $f(x) = \cos(x + \pi/2)$.

Ejemplo 15. Hallar la transformada de Fourier de la función $f(x) = \sin(x + \pi/2)$.

Ejemplo 16. Hallar la transformada de Fourier de la función “escalón” (periódica de periodo 2π) centrada en $\frac{1}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{1}{2} - \pi \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} + \pi \end{cases}$$

7.2. Funciones pares e impares. Por las propiedades del Teorema 2.4 y echando unas breves cuentas de paso al límite, se deduce fácilmente que las funciones pares tienen en su desarrollo de Fourier solo cosenos y las funciones impares solo senos. De este modo, si uno se encuentra ante una función par, solo tiene que echar la cuenta de las integrales de los $f(x) \cos nx \, dx$, y si la función es impar, de las $f(x) \sin nx \, dx$.

Esto es muy útil a la hora de calcular, como veremos, los coeficientes de Fourier de las funciones “no periódicas”. Con unas será más natural considerar una extensión *par*, con otras una extensión *impar*. Por lo general, no compensará utilizar extensiones que no sean ni pares ni impares, pues requiere el doble de cuentas.

7.3. Funciones de periodo $2l$. Si una función tiene periodo distinto a 2π , no se puede hablar *stricto sensu* de coeficientes de Fourier, pues tal y como hemos definido estos, son para periodo 2π . De todos modos, a nadie se le escapa que una mera *homotecia* (dilatación) transforma un intervalo de tamaño $2l$ en uno de tamaño 2π , siempre y cuando $l > 0$, lo que supondremos en adelante.

Para estas funciones de periodo arbitrario, lo que se hará será calcular los desarrollos de Fourier de la función *cambiada de variable* y luego “deshacer el cambio” en la serie.

Ejemplo 17. Sea $f(x)$ la función periódica de periodo $2l$ definida en $[-l, l]$ por $f(x) = |x|$. Desarrollése en serie de Fourier ($f(x) \sim a_0/2 + \sum (a_k \cos \frac{n\pi}{l}x + b_k \sin \frac{n\pi}{l}x)$).

Ejemplo 18. Desarrollése en serie de Fourier la función

$$\begin{cases} -a & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ a & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

(el escalón de Heaviside de periodo 2).

Ejemplo 19. Desarrollése en serie de Fourier la función

$$\begin{cases} 0 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

(extendida periódicamente). Este ejemplo es pesado de hacer porque requiere cuidado en las cuentas, que no son tan fáciles como en otros casos.

En este caso, la función es de periodo 2 y el cambio de variables para que sea de periodo π es

$$t = \frac{\pi}{2}x$$

(la “regla” es que los extremos de x se tienen que convertir en $-\pi$ y π , siempre que $f(x)$ sea, claro, simétrica).

De hecho, se pueden escribir fórmulas explícitas para los coeficientes de Fourier “generales” de las funciones periódicas de periodo $2l$. Supongamos que $f(x)$ es periódica de periodo $2l$. Entonces, si definimos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \end{aligned}$$

entonces la “serie de Fourier de $f(x)$ ”² es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} kx$$

Como se ve, en el caso $l = \pi$, las fracciones internas de los senos y cosenos se simplifican a la expresión original. Las fórmulas de Parseval y la desigualdad de Bessel son las mismas, cambiando los coeficientes respectivos por sus valores en la nueva situación. La convergencia de la serie al valor de la función o a la semisuma de los límites por la derecha y por la izquierda es la misma, para funciones continuas a trozos y acotadas.

7.4. Funciones no periódicas definidas en intervalos: “periodización”. Desarrollos en senos y cosenos. Hasta ahora en todos los ejemplos y enunciados hemos supuesto que las funciones eran periódicas (al principio de periodo 2π y luego, reparametrizando, hemos admitido cualquier periodo). En realidad, como el lector habrá visto, si uno tiene una función *no periódica* pero *definida solo en un intervalo* $[a, b]$, entonces es muy sencillo “generar” una función periódica. Esto es lo que se hace siempre.

Supongamos que se nos da $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$, que *no es periódica*. Se pueden definir “coeficientes de Fourier” de una función periódica que coincide con f en el intervalo.

Pero hay muchas de estas .

Lo primero que se hace, para simplificar es “desfasar” a la variable. Para ello se hace el cambio $t = x - a$ (de manera que todo se pasa a hacer en el origen, donde hemos definido todo). Esto no es necesario pero es conveniente.

Una vez dado el intervalo $[0, b - a]$, hay tres formas principales de “periodizar” una función definida en él:

²Nótese que estamos forzando la nomenclatura, pues nuestra definición original es para series de periodo 2π .

Par: Se puede generar una función par por “simetría axial”:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En este caso, el desarrollo de Fourier solo tendrá cosenos, claro. Llamaremos a este desarrollo el *desarrollo en cosenos* de $f(x)$.

Impar: Se puede generar un función impar por “simetría de giro” respecto del origen:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En este caso, el desarrollo de Fourier solo tendrá senos. Llamaremos a este desarrollo el *desarrollo en senos* de $f(x)$.

Ni par ni impar: Simplemente “repetiendo” la función “hacia atrás” (una traslación):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x + b - a) & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En este caso, el desarrollo de Fourier tendrá tanto senos como cosenos, y es por tanto menos aconsejable (solo ha de hacerse si a uno se lo piden, vaya).

En cualquiera de los tres casos, se supone que la función se extiende por periodicidad. Así se obtiene una función periódica de periodo $2(b - a)$, a la cual se le pueden calcular los coeficientes de Fourier como se explica en el apartado 7.3 (la reparametrización a $[-\pi, \pi]$, que no es más que una homotecia).

Ejemplo 20. Calcúlese el desarrollo *senoidal* de la función

$$f(x) = \pi x - x^2, \quad \text{para } x \in [0, \pi]$$

La función no es claramente ni par ni impar, pues está definida solo en la parte positiva del eje OX . Puesto que se pide el desarrollo *senoidal*, hay que extender la función de manera *impar* y repetirla periódicamente:

$$f(x) = \begin{cases} \pi x - x^2 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -(-\pi x - (-x)^2) = \pi x + x^2 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

y se extiende a todos los reales periódicamente.

Para calcular el desarrollo de Fourier, *que solo tiene términos senoidales*, pues la función es impar, se ha de calcular

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

que, teniendo en cuenta que *el producto de dos funciones impares es una función par*, da

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin kx \, dx$$

Esta integral no vamos a hacerla detalladamente, solo escribimos el resultado

$$b_k = \frac{4((-1)^{k+1} + 1)}{\pi k^3}$$

que es 0 si k es par y $\frac{8}{\pi k}$ si k es impar. Por tanto, el desarrollo de Fourier se puede escribir

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x$$

8. Problemas y ejemplos

9. El problema de Sturm-Liouville

La aplicación “real” más directa de las series de Fourier es el llamado Problema de Sturm-Liouville, que es un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias que aparece en muchos contextos físicos.

Como este es un curso introductorio, no vamos a tratar el problema en su generalidad total y, por supuesto, vamos a dar por demostrados muchos resultados que distan de ser fáciles. Preferimos que el lector “se haga una idea” de la relación de las Series de Fourier con los problemas físicos.

9.1. El oscilador armónico simple. Uno de los ejemplos más sencillos de sistema dinámico no inercial es el *oscilador armónico simple*, o “el muelle sin rozamiento”.

Imagen del muelle y las fuerzas, etc. . .

Para plantear el problema, no hay más que conocer la Ley de Hook y *añadir las condiciones de contorno* (es decir, especificar información suficiente en los extremos para que el problema “sea único”).

Vamos a plantear el movimiento del oscilador armónico como una función y (que indica la distancia al “origen”, que es la posición de equilibrio del muelle) que depende del tiempo, $y(t)$. Suponemos que hay una masa m en el extremo del muelle.

La Ley de Hook especifica que la fuerza ejercida por el muelle sobre la masa es

$$F = ky$$

en la dirección opuesta al estiramiento.

Por la Segunda Ley de Newton, esa fuerza es proporcional (con la masa como constante de proporcionalidad) a la aceleración del cuerpo (estamos, obviamente, suponiendo que el sistema está completamente aislado y que no hay rozamientos). Como la aceleración no es más que la derivada segunda del espacio por el tiempo dos veces, se tiene:

$$F = ma = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

de manera que el movimiento del oscilador armónico simple viene determinado por la ecuación (nótese el signo menos):

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky$$

que, escrito todo en el primer miembro se transforma en:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$$

Para que el problema tenga sentido, hay que imponer las condiciones de contorno. Esto es natural, no una imposición teórica: cualquier problema físico requiere unas condiciones en “los extremos del problema”.

Por comodidad, cambiamos las unidades y decidimos que al cabo de π segundos el muelle esté en su posición original —pero *no* necesariamente en equilibrio—. Esto significa que imponemos que $y(0) = y(\pi) = 0$.

Así pues, tenemos el siguiente problema que resolver

$$\begin{cases} y'' + ky = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

(donde hemos reparametrizado y “metido la m en la k ”, sin cambio de signo porque $m > 0$ —tenemos un *cuerpo*—).

9.1.1. *Solución del OAS.* La solución del oscilador armónico simple se divide en 3 casos, dependiendo de si $k = 0$, $k < 0$ ó $k > 0$.

Caso $k = 0$. La ecuación diferencial deviene

$$y'' = 0$$

(con las condiciones de contorno).

Las soluciones son de la forma $y = c_1 + c_2 t$. Si imponemos las condiciones ahora,

$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ y(\pi) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

de manera que la única solución que existe en este caso es la trivial.

Caso $k < 0$. La ecuación se puede escribir, utilizando una notación un tanto “abusiva”

$$(D^2 - \alpha^2)y = 0$$

donde D significa “derivar” y $-\alpha^2 = k$. Sin entrar en detalles, esta ecuación se puede “simplificar” y escribir como

$$(D - \alpha)(D + \alpha)y = 0$$

y una solución de esta es una suma de una solución de $(D - \alpha)y = 0$ con una solución de $(D + \alpha)y = 0$ (*hemos factorizado el polinomio*). Cada una de estas es sencilla

$$\begin{aligned} y' - \alpha y = 0 &\rightarrow y = c_1 e^{\alpha t} \\ y' + \alpha y = 0 &\rightarrow y = c_2 e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general en este caso es de la forma $y = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}$. Ahora, imponiendo las condiciones iniciales se ha de tener

$$c_1 + c_2 = 0, \text{ y } c_1 e^{\pi t} + c_2 e^{-\pi t} = 0$$

que es un sistema homogéneo compatible determinado y tiene solo la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Así pues, no hay soluciones no triviales en este caso, tampoco.

Caso $k > 0$. Igual que en el anterior, se puede reescribir la ecuación como

$$(D^2 + \alpha^2)y = 0$$

con α real. Esta ecuación es también fácilmente soluble

$$y'' = -\alpha^2 y \rightarrow y = c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t.$$

Si imponemos las condiciones iniciales, sale

$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ y(\pi) = 0 \rightarrow c_2 \sin \alpha \pi = 0 \end{cases}$$

(nótese que en el segundo renglón ya hemos utilizado que $c_1 = 0$). La segunda ecuación solo tiene solución no trivial si α es un número natural, y en este caso c_2 puede ser cualquier constante.

En resumen. El problema del OAS $y'' + ky = 0$, con condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) = 0$ tiene solución no trivial si y solo si $k = n^2$ con $n = 1, 2, 3, \dots$. Además, en este caso, la solución es $y = c \sin nt$, donde c es una constante arbitraria.

Físicamente, un OAS con esas condiciones de contorno (que significan, básicamente, que el periodo es exactamente π) solo puede darse como una onda pura (y por tanto el muelle tiene que ser de una elasticidad determinada dependiendo de la masa). La amplitud puede ser cualquiera ($y = c \sin nt$, amplitud c , frecuencia n).

9.2. El problema general de Sturm-Liouville. El oscilador armónico no es más que un caso muy particular de lo que se conoce como el *Problema de Sturm-Liouville*, que es una ecuación diferencial

$$(5) \quad \frac{d}{dx} [p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

con las hipótesis

$$\begin{aligned} p(x) &\text{ de clase } \mathcal{C}^1 \text{ en } [a, b], \\ f(x), q(x), r(x) &\text{ continuas en } [a, b], \\ p(x), r(x) &> 0 \text{ en todo } [a, b], \\ \lambda &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

y con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde al menos un a_i es no nulo y algún b_i es no nulo. Esto se expresa diciendo que $|a_1| + |a_2| \neq 0$ y $|b_1| + |b_2| \neq 0$.

Atención: por lo general, en los problemas que hagamos, la expresión será mucho más simple, $p(x) = k, q(x) = 0, r(x) = 1$, el intervalo será $[0, \pi]$ ó $[0, 1]$ y las condiciones de contorno serán de un solo término.

9.2.1. *El problema homogéneo.* Cuando se tiene un problema de Sturm-Liouville como (5), *siempre se ha de considerar primero el problema homogéneo asociado*, que es el mismo problema sustituyendo $f(x)$ por 0:

$$(6) \quad \frac{d}{dx} [p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \quad x \in [a, b]$$

con *las mismas* condiciones de contorno.

Los valores y funciones propias. Dado un problema de Sturm-Liouville homogéneo como (6), se denominan *valores propios* del sistema a los valores de λ para los que existe una solución no trivial. Para un valor propio λ_0 , se denominan *funciones propias asociadas* a λ_0 a las funciones solución del sistema homogéneo para ese λ_0 .

TEOREMA. *Dos funciones propias del mismo valor propio son proporcionales.*

En el ejemplo del OSA de arriba, que es un sistema ya homogéneo, los valores propios, como se vio, son los números enteros que son cuadrados perfectos $\lambda = n^2$. Para n^2 , las funciones propias eran $c \sin nt$, donde c es un número real (no nulo). Se comprueba así que, dado un valor propio, dos funciones propias asociadas son proporcionales.

El interés de los autovalores del sistema homogéneo y de las funciones propias es que, si λ *no es un valor propio* del problema homogéneo asociado, entonces el problema de Sturm-Liouville *tiene solución única* y esta se expresa como *serie de las autofunciones*.

Es decir, si $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \dots$ son los autovalores del problema homogéneo asociado 6, las soluciones del problema original 5 se escriben como serie de funciones

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(x),$$

donde φ_k es una función asociada al (es una *autofunción* del) autovalor λ_k , para cada k .

Lo único que hace falta, una vez “escrita” así la solución, es calcular los coeficientes A_k , para lo que se sustituye la serie en la ecuación y aparece (tras agrupar términos, etc.) un problema tipo Fourier para $f(x)$.

9.3. Ejemplos. Un primer ejemplo de problema de Sturm-Liouville es un oscilador sujeto a una fuerza que depende de la distancia

Ejemplo 21. Hallar la solución formal del problema de Sturm-Liouville dado por

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = x, & \text{para } y \in [0, \pi] \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Suponiendo que λ *no* es un autovalor del sistema homogéneo asociado.

Nótese que estamos ahora imponiendo condiciones en las derivadas de la posición (en las *velocidades*), no en la posición.

Primero (y esto es lo que se ha de hacer en todo problema de Sturm-Liouville) calculamos los autovalores y autofunciones *del problema homogéneo asociado*:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \text{para } y \in [0, \pi] \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

para lo cual razonamos exactamente igual que para resolver el OAS 9.1.1, dividiendo en los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$. Como la ecuación diferencial es la misma, el razonamiento es *el mismo*, lo único que cambia son las condiciones de contorno. En cualquier caso, se tiene que

Caso $\lambda = 0$: No tiene más solución que la trivial.

Caso $\lambda < 0$: No tiene más solución que la trivial (porque salen las mismas funciones $e^{\alpha x}$ y $e^{-\alpha x}$, etc.

Caso $\lambda > 0$: Si se pone $\lambda = \alpha^2$, la solución ha de ser de la forma $y = a_1 \sin \alpha x + a_2 \cos \alpha x$ y las condiciones iniciales imponen que

$$0 = y'(0) = a_1 \alpha \rightarrow a_1 = 0$$

$$0 = y'(\pi) = a_1 \alpha \cos \alpha \pi$$

que solo tiene soluciones no triviales si $\alpha = n$ es un número natural. Nótese (y esto es **importante**) que $\alpha = 0$, y por tanto $\lambda = 0$ también cuenta como autovalor, pues da como solución la constante $y = a_2$.

Así pues, los autovalores del problema homogéneo asociado son n^2 para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (nótese que incluimos el 0). Y las autofunciones son

$$\varphi_0 = a_0(\text{constante})$$

$$\varphi_{n^2} = \cos nx, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

La primera $\varphi_0 = a_0$ se puede poner así o $a_0/2$, pues al fin y al cabo, da igual mientras sea constante.

La solución formal del problema de Sturm-Liouville original, por tanto, se escribirá como (sacando partido a la escritura de series de Fourier)

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx$$

(es decir, $y(x)$ es una serie de cosenos, una *serie de Fourier*). Sustituyendo en la ecuación original (y teniendo en cuenta que la derivada segunda del

coseno es menos el coseno), se obtiene

$$(7) \quad \lambda \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\lambda - k^2) \cos kx = x$$

Es decir, hemos de *calcular el desarrollo en cosenos*³ de la función $f(x) = x$ definida en el intervalo $[0, \pi]$. Para esto recordamos que hay que extender la función *de manera par* a $[-\pi, \pi]$ y calcular los coeficientes de Fourier.

Es decir, hemos de calcular los coeficientes de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(y extendida periódicamente a todo \mathbb{R} , claro).

Estos están ya hechos en algún sitio :

$$a_0 = \pi, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Y, sustituyendo para igualar en la ecuación 7, se obtiene fácilmente:

$$A_0 = \frac{\pi}{\lambda}, \quad A_{2k} = 0, \quad A_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2 [\lambda - (2k-1)^2]}, \quad k = 1, 2, \dots$$

así que (aun no hemos terminado, falta esto) la solución al problema original es

$$y = \frac{\pi}{2\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2 [\lambda - (2n-1)^2]} \cos(2n-1)x$$

³Y luego “reescribir todo” teniendo en cuenta el λ y el $\lambda - k^2$.

CAPÍTULO 2

Integración en Varias Variables

1. Introducción

La integración en varias variables se puede imaginar de la manera clásica, que es muy visual, pensando que se están calculando “volúmenes” de figuras delimitadas por una función o de otra manera, también clásica, menos visual (puesto que no es “tan obvia”) pero más real desde el punto de vista físico, que es pensar que se están calculando masas de conjuntos a partir de densidades.

En el segundo caso, los enunciados a veces pueden parecer más naturales, especialmente el teorema del cambio de variables, para el que ya no hace falta representarse un volumen en dos sitios distintos, sino pensar en una “deformación de una masa” por contracción y dilatación en todas las direcciones.

De todos modos, la integración en más de una variable está siempre sujeta a dos principios elementales, que son la base de todos los resultados que se manejan (y, de hecho, son los que *dirigen* la teoría: se trata de “poder integrar” en varias variables sabiendo que hay restricciones).

- (1) Solo conocemos con seguridad el volumen de un paralelepípedo.
- (2) Solo sabemos calcular primitivas de funciones de una variable (el hecho es que *no hay* primitivas de funciones de varias variables).

Estos dos “principios” o “condicionantes” son los que hacen que tanto el teorema de Fubini (cómo se integra en un cuadrado y en general en cualquier paralelepípedo) y el teorema del cambio de variable (que, precisamente, permite saber cómo calcular la integral una vez que se “transforma” el dominio de integración en un paralelepípedo o en algo contenido en él) sean relevantes. Quizás el teorema del cambio de variable sea importante también porque permite “simplificar” integrales, pero esto es más cierto en una que en varias variables.

Vamos a explicar la integración en 2 y 3 variables a la vez, y los cambios de coordenadas útiles los iremos haciendo según convenga. Puesto que este es un curso rápido, importa más aprender a hacer las cuentas bien que saber a fondo por qué los resultados son ciertos. Nos abstendremos de enunciar los resultados en total generalidad, pues al fin y al cabo, el estudiante se va a encontrar siempre con funciones que son continuas salvo en conjuntos de medida cero, por no decir *infinitamente diferenciables*.

Finalmente, vamos a hacer un estudio de la integración *en conjuntos acotados*, es decir, el problema de las integrales impropias no lo vamos a tocar, ni el de los conjuntos medibles pero no acotados.

2. Bases de la integración, el teorema de Fubini

Para calcular volúmenes, área, masas, espacios, temperaturas medias, etc. . . *en general*, es imprescindible saber cómo se calcula el caso más particular de todos, el del paralelepípedo (es decir, un cuerpo delimitado por “planos” paralelos). En lugar de hablar de paralelepípedos, utilizaremos el término *cubo*, abusando generosamente de la nomenclatura. Un cubo en \mathbb{R}^n (es casi la única vez que vamos a hablar tan en general) viene dado, por tanto, por una familia de n vectores (que son los vectores de “una esquina”, el resto del cuerpo se calcula repitiendo estos vectores en cada extremo). Atención, para imponer un poco de rigor, definimos

DEFINICIÓN 2.1. Un cubo en \mathbb{R}^n es el producto cartesiano de un número finito de intervalos semiabiertos por la derecha:

$$Axs = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

donde se sobreentiende que $b_i > a_i$ (los intervalos tienen los extremos bien colocados).

Así que es natural definir,

DEFINICIÓN 2.2. El volumen de un cubo $A = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ es

$$\text{vol}(C) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

En lo sucesivo vamos a necesitar hablar de conjuntos *irrelevantes*. En teoría de la integración, estos conjuntos son los *de contenido 0* y los *de medida nula*.

DEFINICIÓN 2.3. Un subconjunto C de \mathbb{R}^n es *de contenido 0* ó *de contenido nulo* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección A_1, \dots, A_n finita de cubos tal que

$$C \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n \text{ y } \sum_{i=1}^n \text{vol } A_i < \varepsilon$$

Esos conjuntos son *muy pequeños*, pero existe otra familia más interesante y general de conjuntos que también son muy pequeños:

DEFINICIÓN 2.4. Un subconjunto C de \mathbb{R}^n se dice *de medida nula* ó *de medida 0* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia *numerable* de cubos tal que

$$C \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol } A_i < \varepsilon$$

Como se ve, todo conjunto de contenido cero tiene medida cero, pero no al revés (por ejemplo, un conjunto no acotado no tiene contenido cero nunca, pero puede ser de medida cero).

2.1. Integrales en cubos. Trabajamos ahora en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , da igual. Fijemos un cubo $C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (ó $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$) si en \mathbb{R}^2). Está claro que si $f(x) = c$ es constante en C , su integral ha de ser

DEFINICIÓN 2.5. La *integral de una función constante en un cubo* C es el producto del valor de la función por el volumen del cubo.

$$\int_P f = c \cdot \text{vol } P = c \text{ vol}(C) = c(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

que no es más que la idea de “la masa es el volumen por la densidad” trasladada a un modelo matemático concreto.

Ahora bien, si alguna propiedad tiene que cumplir la integral es que la integral en un conjunto ha de dar lo mismo que la suma de las integrales en una partición. En concreto, si el cubo C se puede dividir en cubos C_1, \dots, C_r y f es una función sobre P , ha de ser

$$\int_P f = \int_{C_1} f + \cdots + \int_{C_r} f$$

(la masa no cambia si se corta el cuerpo). Esta propiedad es elemental de probar para funciones constantes sobre cubos si la subdivisión se hace en cubos.

Pero para hablar con precisión, necesitamos la definición de *partición*:

DEFINICIÓN 2.6. Dado un conjunto C , una *partición de C* es una familia finita de conjuntos C_1, \dots, C_n tal que

- Llenan todo el conjunto C :

$$C_1 \cup \cdots \cup C_n$$

- No se cortan entre sí: para cualquier par i, j , se tiene que

$$C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Esta definición corresponde exactamente con la idea de “trocear” un conjunto en partes más pequeñas.

La definición de función integrable en general sobre un cubo no puede ser más sencilla, igual que en una variable. Se consideran subdivisiones del cubo en conjuntos cada vez más pequeños, se aproxima en cada uno de esos conjuntos por una constante “superior” e “inferior” y si tomando supremos e ínfimos da lo mismo, la función es integrable. Se supone que P es un cubo:

DEFINICIÓN 2.7. Sea C un cubo y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función de valores no negativos y acotada. Sea $\mathcal{P} = C_1, \dots, C_n$ una partición de C en cubos, y para cada i , sea $f_i = \inf_{x \in C_i}(f(x))$ y $f^i = \sup_{x \in C_i}(f(x))$. Se llaman *suma inferior* y *suma superior* a

$$I_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \text{vol } C_i, \quad S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n f^i \cdot \text{vol } C_i$$

las sumas de las integrales en cada pequeño cubo. Se dice que f es *integrable* en C si

$$I^-(f) := \sup_{\mathcal{P}}(I_{\mathcal{P}}(f)) = \inf_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(f)) =: I^+(f)$$

Donde el supremo y el ínfimo se toman en el “conjunto de particiones de P en cubos”. Los nombres I^+ e I^- vienen de “integral superior” (por arriba) e “integral inferior” (por abajo).

Igual, *exactamente igual* que en R . Lo único que uno ha de utilizar particiones en conjuntos más complicados que segmentos (cubos).

La definición que se acaba de dar es solo para funciones positivas, pero toda función f es diferencia de dos funciones positivas $f = f_+ - f_-$, donde

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0)$$

(esto es un artificio que simplifica las definiciones, nada más, no hay que preocuparse por ello).

DEFINICIÓN 2.8. Si C es un cubo en \mathbb{R}^n , decimos que una función acotada $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ es *integrable* en C si tanto f_+ como f_- son integrables en C . Se define la *integral de f en C* como

$$\int_C f = \int_C f_+ - \int_C f_-$$

(es decir, *el área total es el área por encima del eje menos el área por debajo*, como se diría en una variable). Si estuviéramos calculando temperaturas en una lámina, diríamos que las temperaturas por encima de 0 suman y las por debajo de 0 restan.

En este punto se plantean dos cuestiones:

- ¿Qué pasa si el conjunto de integración no es un cubo?
- ¿Cómo se *calcula* la integral?

La primera pregunta es relativamente fácil de responder, la respuesta a la segunda pregunta se llama *Teorema de Fubini*.

2.2. Conjuntos que no son cubos. Todo conjunto *acotado* está incluido en un (y en muchos) cubo. Supongamos que se nos da un conjunto A acotado de \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 y una función en A $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Es lógico preguntarse qué significado “formal” puede tener la “integral de f en A ”. Al fin y al cabo, la forma de una lámina no tiene por qué ser rectangular, o podemos tener que saber calcular la masa de una esfera conociendo las densidades, por ejemplo. Lo más sencillo desde el punto de vista teórico es definir las “funciones indicador”.

DEFINICIÓN 2.9. Dado un conjunto cualquiera A de \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 , la *función indicador* (o *función caracterísitca*) de A es la función que vale 0 fuera de A y 1 en A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Supongamos ahora un conjunto acotado A y un cubo C que lo incluye. Diremos que A es *medible* si la función indicador χ_A es integrable en C (está claro que esta definición no depende de C). En realidad, esta noción es demasiado teórica para nosotros, pues vamos a trabajar siempre con conjuntos delimitados por ecuaciones algebraicas o a lo sumo analíticas, que son siempre medibles. Ahora la definición de integral en A es sencilla:

DEFINICIÓN 2.10. Dado un conjunto acotado y medible A y una función acotada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es *integrable en A* si para cualquier cubo C que incluya a A , la función

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ f(x) & \text{si } x \in A \end{cases}$$

es integrable. En ese caso, se define

$$\int_A f = \int_C \tilde{f}$$

Esta definición no depende del cubo C que incluya a A . Se define, en concreto, el *volumen* de A como la integral de la función constante 1 sobre A :

$$(8) \quad \text{vol}(A) = \int_A 1.$$

Lo que se ha hecho es “desplazar el problema”. Para definir la integral en un conjunto arbitrario, se ha generado una función que solo sirve de herramienta técnica, pero que permite dar una definición coherente con las herramientas que se poseían. Ahora que sabemos *qué es una integral en un conjunto arbitrario* (acotado y medible, eso sí), nos falta saber *cómo se calcula*.

Como mera nota, pues nuestro curso solo tratará conjuntos “más bien regulares”, enunciamos el resultado siguiente:

TEOREMA 2.11. *Un conjunto acotado A es medible si y solo si su borde es de medida nula.*

Donde el *borde de A* es el conjunto de puntos para los que cualquier bola centrada en ellos tiene puntos de A y puntos que no son de A .

2.3. Propiedades elementales. Antes de seguir con el teorema de Fubini, conviene enunciar las propiedades más elementales de la integración, que se usan sin explicación ubicuamente. Primero, la linealidad:

TEOREMA 2.12. Si f y g son funciones integrables en un conjunto acotado medible A , y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar, entonces

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$$

$$\int_A \lambda f = \lambda \int_A f$$

La integración “conserva el orden” (si la gráfica de una función está por encima de otra, entonces la integral de la primera es mayor que la de la segunda): si un cuerpo tiene menor densidad en cada punto que otro de la misma forma, entonces la masa del primero es menor que la del segundo:

TEOREMA 2.13. Si f y g son funciones integrables en el conjunto acotado medible A y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in A$, entonces

$$\int_A g \leq \int_A f$$

Como consecuencia,

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

La integral es *aditiva* respecto del conjunto de integración:

TEOREMA 2.14. Si A y B son conjuntos disjuntos medibles (con lo que $A \cup B$ es medible) y $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable entonces

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Finalmente, los conjuntos de contenido cero no cambian el valor de la integral, así que uno puede siempre obviar los conjuntos de contenido cero que aparezcan en sus problemas:

TEOREMA 2.15. Si A es un conjunto acotado medible, f es una función integrable en A y $B \subset A$ es un conjunto de contenido cero, entonces

$$\int_A f = \int_{A \setminus B} f$$

o, lo que es lo mismo, si B es un conjunto de contenido cero cualquiera y f es cualquier función integrable,

$$\int_B f = 0$$

Por cierto, la teoría de la integración que estamos presentando es la que hace Spivak en [1], algo simplificada para exponerla sin demasiado aparataje. Sus *rectángulos* son nuestros *cubos*.

2.4. Cálculo de integrales. El teorema de Fubini. Como dijimos arriba y todo el mundo sabe, las únicas integrales que sabemos calcular de verdad “en general” son las de una variable (pues es el único lugar en que tiene sentido la noción de “primitiva de una función”). El teorema de Fubini es la herramienta que nos permite reducir el problema de cálculo de integrales en dimensiones superiores a dimensión 1.

La imagen mental del teorema de Fubini se corresponde con la idea de *integrar variable a variable*, o dicho de otro modo, *dimensión a dimensión*.

En general, no integraremos funciones *sobre cubos*, pero tal y como hemos definido la integral de una función sobre un conjunto acotado medible (definición 2.10), nos es suficiente enunciar el teorema de Fubini en cubos y *trasladarlo* a conjuntos acotados arbitrarios utilizando la función característica.

Lo enunciamos en dos, tres y n variables para tranquilidad del lector.

2.4.1. *El teorema de Fubini en dos variables.*

TEOREMA (Teorema de Fubini, 2 variables). *Sea $P = [a, b] \times [c, d]$ un cubo (rectángulo) en \mathbb{R}^2 , donde las variables son (x, y) y sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada $x \in [a, b]$, sea $g_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ la función*

$$g_x(y) = f(x, y).$$

Definimos $I^+(x) = I^+(g_x)$ e $I^-(x) = I^-(g_x)$ (la integral superior e inferior de g_x). Entonces las funciones $I^+(x)$ e $I^-(x)$ son integrables y

$$\int_P f = \int_{[a,b]} I^+(x) = \int_{[a,b]} I^-(x)$$

es decir, la integral existe y es igual a la iteración de las integrales superiores ó inferiores.

El teorema de Fubini es lo que permite que escribamos¹

$$\int_P f = \int_a^b \left(\int_c^d g(x, y) dy \right) dx.$$

Por la misma regla de tres, se tiene que

$$\int_P f = \int_c^d \left(\int_a^b g(x, y) dx \right) dy$$

Para conjuntos medibles en general, no hay más que, como arriba, considerar un rectángulo suficientemente grande que los incluya y hacer la integral de la función característica por la función inicial. De todos modos, si el conjunto es lo suficientemente cómodo, se pueden escribir las cosas más clásicamente.

¹Aunque *no es esto exactamente* lo que hemos demostrado. La escritura como integral iterada tiene sentido porque las funciones tienen sentido *salvo en un conjunto de contenido cero* y estos son irrelevantes a la hora de integrar. Pero puesto que en este curso las funciones serán todas continuas (y de hecho diferenciables) salvo en conjuntos de contenido cero, abusaremos de ahora en adelante de la notación.

2.4.2. *Regiones planas “bien” delimitadas.* Diremos que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$ está “bien delimitado” verticalmente si existe un intervalo $[a, b]$ y funciones $m(x), M(x)$ continuas² tales que el punto (x, y) pertenece a A si y solo si $a \leq x < b$ y $m(x) \leq y < M(x)$. Las funciones $m(x)$ y $M(x)$ se llamarán “borde inferior” y “borde superior” de A .

Diremos que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$ está “bien delimitado” horizontalmente si pasa lo mismo pero respecto de la segunda coordenada: existe un intervalo $[c, d]$ y funciones $m(y), M(y)$ continuas³ tales que el punto (x, y) pertenece a A si y solo si $c \leq y < d$ y $m(y) \leq x < M(y)$. Las funciones $m(y)$ y $M(y)$ se llamarán, por razones obvias, “borde izquierdo” y “borde derecho” de A .

Está claro que puede haber conjuntos “bien delimitados” vertical y horizontalmente *a la vez*. Por ejemplo, un disco, un ortoedro... Cualquier conjunto convexo⁴ está bien delimitado horizontal y verticalmente.

En el libro de referencia, estos conjuntos se llaman “de tipo I” y “de tipo II”, pero prefiero una nomenclatura más castellana.

En estos conjuntos se puede integrar una función poniendo límites de integración variables.

TEOREMA 2.16. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado medible tal que $A \subset [a, b] \times [c, d]$. Si A está bien delimitado verticalmente y $m(x)$ y $M(x)$ son sus bordes inferior y superior y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en A , entonces*

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{m(x)}^{M(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Lo análogo ocurre en regiones bien delimitadas horizontalmente, cambiando el orden de integración:

TEOREMA 2.17. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible tal que $A \subset [a, b] \times [c, d]$. Si A está bien delimitado horizontalmente y $m(y)$ y $M(y)$ son sus bordes izquierdo y derecho y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en A , entonces*

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_{m(y)}^{M(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

2.4.3. *El teorema de Fubini en tres variables.* En \mathbb{R}^3 nos limitamos a dar enunciar el resultado para el orden de integración z, y, x , remarcando que en todas las aplicaciones de este curso *el orden en que se integra es irrelevante*.

TEOREMA 2.18. *Sea $A \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ un conjunto acotado medible y $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada integrable. Supongamos que existen*

²Salvo en un conjunto de contenido cero, pero esto es irrelevante.

³Mismo comentario que antes

⁴Aunque no hemos definido conjunto convexo, claro

funciones $m(x), n(x)$ y $u(x, y), v(x, y)$ tales que $(x, y, z) \in A$ si y solo si $a \leq x < b$, $m(x) \leq y < n(x)$ y $u(x, y) \leq z < v(x, y)$. Entonces⁵

$$\int_A g = \int_a^b \left(\int_{m(x)}^{n(x)} \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} g(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Nótese que, aunque lo que “primero se vea” sea dx , lo que primero se integra es la variable z , luego la y y luego la x en el enunciado del teorema.

Un conjunto A que cumpla las condiciones del teorema lo llamaremos *bien delimitado*. Si un conjunto no cumple esas condiciones, lo más probable es que se pueda poner como unión disjunta de conjuntos bien delimitados. Si no se puede, entonces hay que echar cuentas detalladamente.

Ejemplo 22. La esfera, los cubos, los cilindros, los elipsoides, todos ellos están bien delimitados.

2.4.4. *El teorema de Fubini en general.* .

3. El teorema del cambio de variable

Haber reducido el problema de integración en varias variables a la integración iterada en una variable es mucho, pero no es suficiente para la mayoría de las aplicaciones. En una variable se puede facilitar la integración con una reparametrización (el método de cambio de variable), hasta el punto que hay integrales que solo se pueden calcular por este método. En varias variables ocurre exactamente igual. El enunciado del teorema equivalente es bastante más complejo que en una variable, pero el resultado es *moralmente* el mismo, si se entiende bien lo que se hace tanto en una como en varias variables.

3.1. Aplicaciones diferenciables 1 – 1. El concepto clave en este contexto es el de aplicación 1 – 1 diferenciable. Para hablar de cambios de variable es necesario el concepto de *conjunto abierto*, definido más adelante (ver 4.1).

DEFINICIÓN 3.1. Diremos que una aplicación $\varphi : A \rightarrow B$ entre dos abiertos de \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 es una *aplicación 1 – 1 diferenciable* si es una biyección (es inyectiva y sobreyectiva) y tiene derivadas parciales en todos los puntos, *salvo quizá en un conjunto de contenido cero*.

Es decir, el conjunto de puntos donde *el jacobiano*⁶ de la aplicación se anula es de contenido cero (muy pequeño).

Prácticamente todas las aplicaciones que conocemos tienen derivadas parciales en todos los puntos donde están definidas. Además, si una aplicación entre dos abiertos de \mathbb{R}^2 es 1 – 1 y tiene derivadas parciales, entonces

⁵Estamos una vez más abusando de la notación, pero este enunciado es el que utilizaremos.

⁶De ahora en adelante, el *jacobiano* designará el *determinante de la matriz jacobiana de una aplicación diferenciable*.

su jacobiano solo puede ser nulo en un conjunto de contenido cero (esto pasa en \mathbb{R}^3 y en cualquier dimensión, se llama *Teorema de Sard*). Esta propiedad es importante como luego se verá.

Es decir, lo difícil en la definición, a la hora de trabajar, es conseguir que la aplicación sea 1 – 1 (inyectiva y sobreyectiva).

La condición sobre el conjunto de contenido cero también es importante, pues hay muchas aplicaciones que mandan un abierto en otro biyectivamente pero que admiten derivadas parciales en todo el abierto inicial salvo “unos pocos puntos” .

Una manera visual de imaginar una aplicación 1 – 1 diferenciable es pensar el abierto A como un sólido (en el plano, una lámina) y el abierto B como una deformación *suave* de dicho sólido: estirar, doblar, comprimir, pero no romper. El que sea diferenciable *salvo en un conjunto de contenido cero* quiere decir que se permite que la deformación genere *esquinas*, pero “no demasiadas”. En realidad, como el jacobiano es distinto de cero casi siempre, habrá pocas esquinas en todos los casos que nos encontremos.

Esta imagen visual es buena porque nos da incluso una idea del resultado.

3.2. Idea. En una variable, el teorema del cambio de variable dice que si $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es diferenciable y $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces

$$\int_c^d h(x) dx = \int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

Supongamos por un momento que g tiene signo constante positivo (es decir, consiste en *estirar ó encoger*, pero no cambiar de orientación ni hacia atrás).

Entendamos $h(x)$ como una *densidad* sobre una varilla de extremos c y d . La integral de la derecha es la masa de la varilla (visualmente, se calcula la masa de un “elemento muy pequeño”, calculando densidad por longitud, $h(x)dx$ y se suman todas estas masas, que es lo que hace la operación \int_c^d).

La aplicación g es una transformación que convierte la varilla $[a, b]$ en la $[c, d]$. La imagen mental correcta es que la varilla $[a, b]$ se estira por unos sitios y se encoge por otros. El hecho de que g tenga signo constante solo significa que “no se dobla hacia atrás”. La varilla se estira o se encoge en cada punto según indica la derivada de g (si la derivada es mayor que 1, se “estira”, si es menor que 1, se encoge).

Ahora nos gustaría calcular la masa de la varilla $[a, b]$, que es la misma masa que la de $[c, d]$, pero con otra distribución de densidades, que proviene de esa operación de estirado/encogido.

Tomemos un trozo muy pequeño de la varilla inicial, cerca del punto $x_0 \in [c, d]$. Este pequeño segmento, que tiene longitud dx , la masa es $h(x_0) dx$. El punto x corresponderá a uno de la varilla deformada $t_0 \in [a, b]$ (es decir, $g(t_0) = x_0$).

Ahora bien, la longitud *pequeña* dx corresponde a una longitud $g'(t_0)dt$, pues un segmento pequeño se transforma, por una aplicación, en un segmento dilatado tanto como indique la derivada. Por tanto, en el punto t_0 , la masa total que hay acumulada es el producto de “la densidad retrotraída” $h(g(t_0))$ por la longitud equivalente a dx , que es $g'(t_0)dt$, así pues, la “masa” en t_0 es $h(g(t_0))g'(t_0) dt$.

Como la unidad diferencial de longitud en $[a, b]$ es dt , resulta que *la densidad en t_0 es $h(g(t_0))g'(t_0)$* . Si ahora calculamos la masa en la varilla $[a, b]$ según la fórmula “suma de las densidades por longitudes diferenciales”, queda

$$\int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

y como *la masa no se crea ni se destruye* por una dilatación, ha de ser igual a la masa de la varilla $[c, d]$:

$$\int_c^d h(x) dx = \int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

Cambemos de dimensión por un momento.

Tomemos una lámina plana, que llamamos L , de tamaño 1×1 , cuya densidad se desconoce. Se le somete a una deformación térmica lineal φ , que la convierte en otra lámina plana pero ya no cuadrada, sino formado un paralelogramo delimitado por los vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , como en la figura . Por un procedimiento extraño, se puede calcular la densidad de esta nueva lámina y se sabe que es ρ' . ¿Cuál es la densidad original de la lámina unidad, si se sabe que es constante, ρ ? *¿Está claro que la densidad no es la misma? ¿por qué?*

No hay más que calcular la masa de la lámina deformada: base por altura por densidad. Un sencillo razonamiento geométrico muestra que, si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$, entonces el área es

$$\text{área} = |x_1y_2 - x_2y_1|.$$

El valor absoluto se toma porque estamos calculando áreas (que no son negativas).

Esto puede parecer misterioso (el determinante es una operación demasiado complicada y sin raíces cuadradas como para que la altura ó el ángulo aparezcan a partir de él), pero es sencillo (y sería bueno que cada uno hiciera el ejercicio) comprobar que es cierto para dimensiones 2 y 3.

Si $D = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, el área del paralelogramo $ABCD$ de la figura 1 es el área del paralelogramo $ABC'D'$ menos el área del $A'B'C'D'$ (como se ve, los triángulos con rayado amarillo son iguales). Con argumentos de semejanza de triángulos (hay muchas líneas paralelas y muchos ángulos iguales en el dibujo) se comprueba que el área de $A'B'C'D'$ es la misma que la de $APQB$, que es (fácil) x_2y_1 . Así que, el área de $ABCD$ es $x_1y_2 - x_2y_1$.

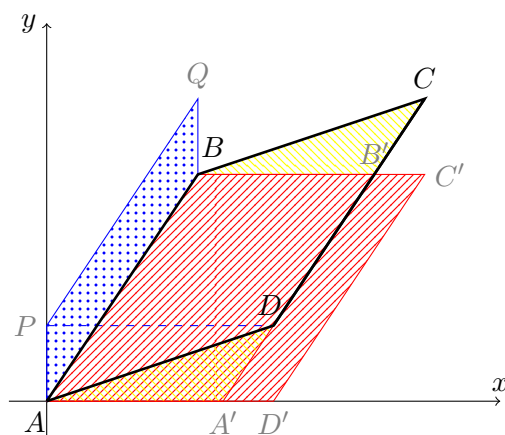


FIGURE 1. Área de un paralelogramo

Así pues, la masa de la lámina es

$$M = \rho' |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \int_{L'} \rho \, dx \, dy$$

Esa masa es, claro, la misma que la de la lámina sin deformar:

$$M = \int_L \rho \, du \, dv$$

y, como el cuadrado unidad tiene área 1, resulta que la densidad original ha de ser

$$\rho = \rho' |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

sustituyendo en la fórmula de la masa, nos queda (nótese el cambio de conjunto de integración y de variables):

$$M = \int_{L'} \rho' \, dx \, dy = \int_L \rho' |x_1 y_2 - x_2 y_1| \, du \, dv$$

pero la expresión del valor absoluto es

$$|x_1 y_2 - x_2 y_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

con lo que tenemos

$$\int_{L'} \rho' \, dx \, dy = \int_L \rho' |\det(\text{Jac}(\varphi))| \, du \, dv$$

La única diferencia entre esta fórmula y la de dimensión 1 que expresamos arriba es que en dimensión 1 no hace falta el valor absoluto *porque ya incluimos el signo al cambiar los extremos de la integral* (una integral entre x e y es opuesta a una integral entre y y x).

El razonamiento en cualquier dimensión es el mismo. . . Lo único que hay que saber es que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de los vectores que lo forman.

TEOREMA 3.2. *Dado un paraleleípedo V delimitado por los vectores v_1, \dots, v_n en \mathbb{R}^n , el volumen de V es el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores expresados en la base estándar.*

Si en vez de una aplicación lineal se tiene una deformación cualquiera, $(x, y) = \varphi(u, v)$, lo que se hace es recurrir a la idea de integral como “suma de masas de elementos diferenciales”.

Supongamos que $\varphi : A \rightarrow B$ es una aplicación 1 – 1 diferenciable entre dos abiertos de \mathbb{R}^2 , cuyo jacobiano tiene determinante de signo constante (y se anula como mucho en un conjunto de contenido cero). Y sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable (una *densidad* ó una *densidad de carga*, por ejemplo).

Por pura física, puesto que el cuerpo es el mismo salvo que sometido a un cambio “mecánico”, ni la masa ni la carga total cambian. Así que

$$\int_B h(x, y) dx dy = \int_A \tilde{h}(u, v) du dv$$

donde $\tilde{h}(u, v)$ es la *densidad* ó *densidad de carga* original, en A .

Mirando infinitesimalmente en un punto (u_0, v_0) de A , tenemos una situación análoga a la de la deformación lineal (esa es la definición de la matriz jacobiana, la aplicación lineal que mejor aproxima a la función):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv \end{aligned}$$

que significa que “un paralelogramo de dimensiones (du, dv) se transforma en uno de dimensiones $\text{Jac}(\varphi) \cdot (du, dv)$ ”. Por tanto, la *densidad* $\tilde{h}(u, v)$ en un paralelogramo de dimensiones (du, dv) es

$$\tilde{h}(u, v) = h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

con lo que la igualdad de integrales (de *masas* o *cargas*) queda

$$\int_B h(x, y) dx dy = \int_A h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi))| du dv$$

que es exactamente la fórmula del teorema de cambio de variable.

3.3. Enunciado y ejemplos. El enunciado preciso del teorema de cambio de variable es, dados dos abiertos acotados A y B de \mathbb{R}^n ,

TEOREMA 3.3. *Sea $\varphi : A \rightarrow B$ una aplicación 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en B . Entonces $h \circ \varphi$ es integrable en A y se tiene*

$$\int_B h = \int_A h \circ \varphi |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

Expresado en coordenadas:

TEOREMA 3.4. Sea $\varphi : A \rightarrow B$ una aplicación en \mathbb{R}^2 dada por $(x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$, que es 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) y cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada integrable en B . Entonces $h \circ \varphi$ es integrable en A y se tiene

$$\int_B h(x, y) dx dy = \int_A h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi)(u, v))| du dv$$

Y en \mathbb{R}^3 (etc.)

TEOREMA 3.5. Sea $\varphi : A \rightarrow B$ una aplicación en \mathbb{R}^3 dada por $(x, y, z) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$, que es 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) y cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada integrable en B . Entonces $h \circ \varphi$ es integrable en A y se tiene

$$\int_B h(x, y, z) dx dy dz = \int_A h(\varphi(u, v, w)) |\det(\text{Jac}(\varphi)(u, v, w))| du dv dw$$

Atención. El teorema del cambio de variable se utiliza siempre para llevar las cosas de B a A . Se supone que en A la expresión de la integral es más sencilla, es conocida, o algo similar. No se ha de pensar que “se lleva la función acotada de A a B ” sino al revés. En caso de duda, un dibujo siempre aclara las cosas.

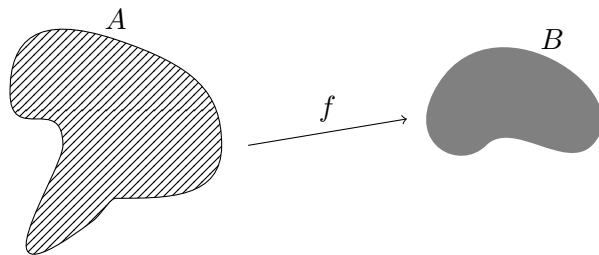


FIGURE 2. Cambio de variables

Este y el teorema de Fubini son los resultados más útiles para calcular integrales definidas en dimensión superior a 1. Lo difícil, en general, es encontrar un cambio de variables que simplifique el problema.

4. Cambios de variable notables

Existen cambios que se utilizan con mucha frecuencia, sobre todo por su naturaleza geométrica. En dimensión 2 el más importante es el cambio “a polares”, que se corresponde con la idea de *observar un conjunto desde*

el origen, en vez de observarlo “desde los ejes”. La misma idea se puede trasladar a dimensión 3 de dos maneras distintas: una considerando el eje z como una “altura”, de donde se obtiene el cambio a *cilíndricas*, otra considerando el espacio como recubierto por esferas de radios sucesivamente mayores, el cambio a *esféricas*.

Cuando en lugar de considerar circunferencias o esferas se consideran elipses o elipsoides, se obtienen las versiones *generalizadas* de todos esos cambios.

4.1. El cambio a polares. Del mismo modo que cualquier punto del plano se puede determinar por un par de coordenadas (x, y) , donde x e y son números reales, cualquier punto se puede determinar por un radio ρ y un ángulo θ , donde el radio es un número real positivo (los radios son distancias) y el ángulo es un número real entre 0 y 2π .

La aplicación está descrita gráficamente en la figura 2. Formalmente, es una aplicación φ del rectángulo $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ en el plano \mathbb{R}^2 dada por las ecuaciones

$$(9) \quad \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Es claramente 1 – 1 diferenciable entre esos dos conjuntos (y no es sobreyectiva pero la imagen es todo el plano real salvo el semieje positivo de las x , con lo que para calcular integrales en el plano da igual). El jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es (claramente):

$$\det(\text{Jac}(\varphi)) = \rho$$

que, en el dominio en que está definida la aplicación, es siempre positivo, así que no hay por qué tomar su valor absoluto.

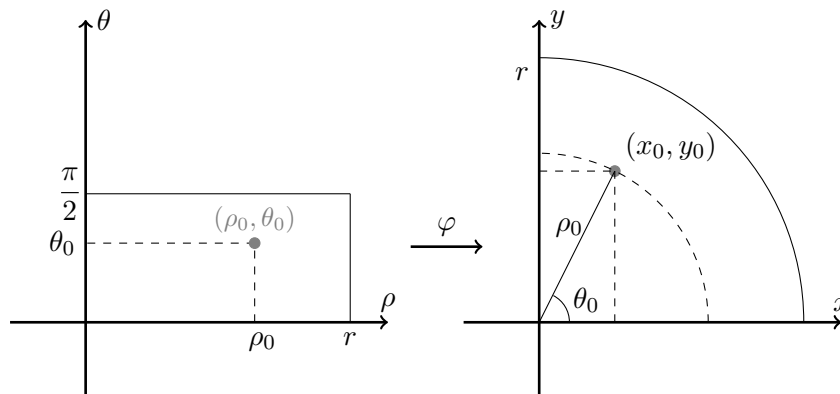


FIGURE 3. Cambio a coordenadas polares

4.1.1. *Polares generalizadas.* El cambio a polares sin más puede modificarse algo para obtener, en lugar de circunferencias concéntricas, elipses. Basta una homotecia en cada coordenada. Fijados dos números reales positivos a, b , el cambio a coordenadas polares generalizadas de parámetros a y b viene dado por las ecuaciones

$$\varphi(\rho, \theta) = (a\rho \cos \theta, a\rho \sin \theta)$$

y tiene por matriz jacobiana

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\det \text{Jac}(\varphi) = ab\rho.$$

que es no negativo (salvo cuando ρ es 0, que es un conjunto de contenido cero).

Está claro que a es el “radio horizontal” de la elipse y b el “radio vertical”. El dominio de definición es el mismo que el de las polares normales, $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ y el recorrido es, igualmente, todo el plano salvo el semieje horizontal derecho y es una aplicación 1 – 1.

4.1.2. *Polares hiperbólicas.* Utilizando una hiérbola en lugar de una circunferencia, se obtiene el cambio a coordenadas hiperbólicas (lo que nos permite introducir las funciones hiperbólicas). La figura 4 muestra gráficamente la definición de las funciones hiperbólicas .

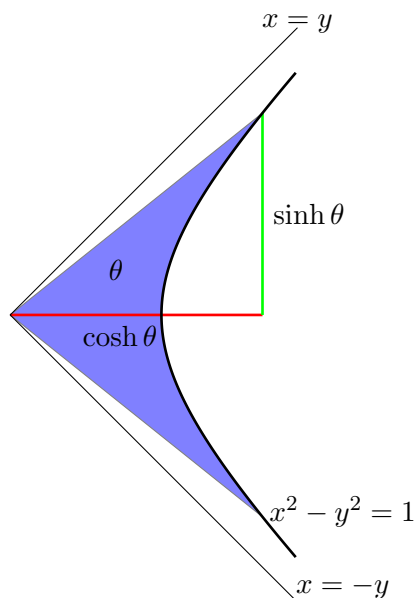


FIGURE 4. Coordenadas hiperbólicas

Como se ve, dada un área θ (que corresponde a la noción de *ángulo* en el caso del círculo) en la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, se pueden definir dos cantidades, el *coseno hiperbólico* $\cosh \theta$ y el *seno hiperbólico* $\sinh \theta$. Si en lugar de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ se utiliza $x^2 - y^2 = \rho^2$, se obtienen $\rho \cosh \theta$ y $\rho \sinh \theta$, respectivamente. Las ecuaciones del cambio de variables son:

$$(10) \quad \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cosh \theta, \rho \sinh \theta).$$

La aplicación envía el semiplano (ρ, θ) (para $\rho \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, \infty)$) en el “aspa” $x^2 - y^2 > 0$. El “aspa” vertical $x^2 - y^2 < 0$ se obtendría con la aplicación $(\rho \sinh \theta, \rho \cosh \theta)$. La aplicación es 1 – 1 diferenciable y biyectiva entre dichos conjuntos y su jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \rho \sinh \theta \\ \sinh \theta & \rho \cosh \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es, en el conjunto $\rho > 0$, positivo e igual a ρ .

4.2. Coordenadas cilíndricas. La primera versión de las coordenadas polares en dimensión 3 es una “traslación directa” de las coordenadas polares planas, utilizando el tercer eje como “altura” (es decir, dejándolo quieto). Así se obtiene el cambio

$$(11) \quad \varphi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

cuyo jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante distinto de cero (en concreto, ρ) en todo el dominio de definición $[0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$ (salvo en un conjunto de medida nula). Es fácil comprobar que es una aplicación 1 – 1 en el dominio y que recubre todo \mathbb{R}^3 salvo un conjunto de medida nula, así que es utilizable como cambio de coordenadas para la integración en cualquier conjunto de \mathbb{R}^3 medible.

4.2.1. *Cilíndricas* generalizadas. La misma generalización que para las coordenadas polares se puede aplicar en las cilíndricas y se obtiene el cambio

$$(12) \quad \varphi(\rho, \theta, z) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta, z)$$

donde a y b son dos números reales positivos. El determinante del jacobiano es $ab\rho$ y el dominio de definición, etc. el mismo que en las cilíndricas. Este cambio es útil cuando en lugar de un cilindro circular hay que parametrizar uno elipsoidal.

4.3. Coordenadas esféricas. La generalización “total” de las coordenadas polares al espacio tridimensional son las llamadas coordenadas *esféricas*. Hay muchas maneras de parametrizar el espacio utilizando el radio y dos ángulos. Aquí escribimos una, pero (aparte de las obvias rotaciones y giros posibles), hay otras que no son necesariamente equivalentes.

Las coordenadas esféricas envían una “banda” infinita (en un sentido) de anchura 2π y altura π con coordenadas (ρ, θ, ϕ) sobre todo el espacio \mathbb{R}^3 con coordenadas (x, y, z) mediante las ecuaciones

$$(13) \quad (x, y, z) = \varphi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta)$$

como se ha dicho, los límites de variación de las variables (ρ, θ, ϕ) son

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

La matriz jacobiana de esta aplicación es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{pmatrix}$$

cuyo determinante tiene signo negativo siempre y es

$$\det(\text{Jac}(\varphi)) = -\rho^2 \sin \phi$$

en el conjunto en que está definido (que es $0 < \rho$, $0 < \theta < 2\pi$ y $0 < \phi < \pi$). Así que para este cambio es preciso tomar el valor absoluto del determinante jacobiano a la hora de hacer el cambio de variables en la integral.

4.3.1. *Esféricas generalizadas.* Como en los casos anteriores, se puede generalizar el cambio a esféricas utilizando un elipsoide de radios a, b, c :

$$(x, y, z) = \varphi(\rho, \theta, \phi) = (a\rho \cos \theta \sin \phi, b\rho \sin \theta \sin \phi, c\rho \cos \theta)$$

que tiene por jacobiano

$$\det(\text{Jac}(\varphi(\rho, \theta, \phi))) = -abc\rho^2 \sin \phi$$

5. Simetrías del conjunto, paridad de la función

Hay unas cuantas simplificaciones útiles a veces para calcular integrales que se derivan de las posibles simetrías del conjunto de integración y de la paridad de la función (*de ambas cosas a la vez*, no basta con que haya una). Las enumeramos someramente pero han de tenerse en cuenta, pues puede perfectamente haber funciones “muy difíciles de integrar” cuya integral sea trivial si se dan estos casos.

5.1. Dimensión 2.

5.1.1. *Simetrías respecto de los ejes.* En el plano \mathbb{R}^2 , dependiendo de las simetrías del conjunto de integración respecto de los ejes coordenados, puede ocurrir:

Funciones pares: Si $f(x, y)$ es par en una de las dos variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del eje correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 2 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la intersección del conjunto Ω con el semiplano positivo correspondiente al eje de simetría.

Funciones impares: Si $f(x, y)$ es impar en una de las dos variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del eje correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

5.1.2. *Simetría respecto del origen.* Por otro lado, si el recinto de integración Ω es simétrico respecto de los dos ejes coordenados y $f(x, y)$ es par en x y en y , entonces

$$\int_{\Omega} f = 4 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la intersección de Ω con cualquiera de los cuadrantes (se suele utilizar el positivo, positivo, por comodidad).

5.2. Dimensión 3.

5.2.1. *Simetrías respecto de planos.* Las siguientes propiedades se dan para funciones en \mathbb{R}^3 :

Funciones pares: Si la función $f(x, y, z)$ es par en una de las variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del plano correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 2 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la mitad del recinto que corresponde al semiespacio positivo en esa variable.

Funciones impares: Si la función $f(x, y, z)$ es impar en una de las variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del plano correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

5.2.2. *Simetrías respecto del origen.* Si una función $f(x, y, z)$ es *par* en cada una de las variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto de todos los planos coordenados, entonces

$$\int_{\Omega} f = 8 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la parte del recinto situada en el octante positivo (en cualquiera de los octantes).

5.3. Cuerpos de revolución. Si P es un cuerpo de revolución, hay varias posibilidades para calcular su volumen .

Como un disco: Si el cuerpo se puede expresar como la rotación *alrededor del eje de $OX(x)$* del área encerrada entre las funciones $g(x)$ y $f(x)$ en el plano (x, y) , entonces

$$vol(P) = \pi \int_a^b |f(x)^2 - g(x)^2| dx$$

suponiendo que $0 \leq g(x) < f(x)$. Si $g(x) = 0$, entonces queda

$$vol(P) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Este cálculo corresponde a la idea de “sumar las áreas de los discos (anillos)” de radio menor $g(x)$ y radio mayor $f(x)$ entre a y b .

Como un cilindro: Si el cuerpo es la rotación del mismo área girando alrededor del eje OY , entonces

$$vol(P) = 2\pi \int_a^b x|f(x) - g(x)| dx,$$

que, si $g(x) = 0$ queda

$$vol(P) = 2\pi \int_a^b x|f(x)| dx.$$

Este cálculo corresponde a la idea de “sumar las áreas de los cilindros verticales” de radio x y altura $|f(x) - g(x)|$, entre a y b , que valen $2\pi x|f(x) - g(x)|$.

6. Medias, momentos, volúmenes...

Hay varias cantidades relevantes en problemas físicos y estadísticos que se definen utilizando integrales (porque *son* nociones que se refieren a datos acumulados). Las enumeramos y damos sus definiciones. Comenzamos por una lista de los que son comunes en todas las dimensiones. En todas estas definiciones, se habla del conjunto C , pero se ha de sobreentender que es C *dotado* de la densidad correspondiente.

Media integral: Si f es una función integrable en un conjunto C acotado medible de \mathbb{R}^n , se define la *media integral* (o simplemente *media*) de f en C como:

$$(14) \quad m(f) = \frac{1}{\text{vol}(C)} \int_C f$$

donde $\text{vol}(C)$ es el volumen de C , como en la página 37.

Masa: Cuando f es una función integrable *no negativa* en un conjunto acotado medible $C \subset \mathbb{R}^n$, se puede decir que f es una densidad, en cuyo caso, la *masa de C* es:

$$(15) \quad m(C) = \int_C f.$$

Carga total: Cuando f es una función integrable en un conjunto acotado medible C , se puede pensar también como una *densidad de carga* (eléctrica) sobre C , en cuyo caso la *carga total* de C es:

$$(16) \quad q(C) = \int_C f.$$

La diferencia con el caso anterior es que la densidad de *masa* es siempre positiva (no hay masas negativas), mientras que para la carga, puede tener cualquier signo.

Densidad media: Dada f integrable en un conjunto acotado medible C , entendida como una densidad de carga ó de masa, la *densidad media* (de carga ó de masa) es:

$$(17) \quad \frac{m(C)}{\text{vol}(C)} \quad \text{ó} \quad \frac{q(C)}{\text{vol}(C)}$$

donde $\text{vol}(C)$ es el volumen de C , como en la página 37.

Centro de masas: Dada una densidad $f(x) \geq 0$ integrable en un conjunto acotado medible $C \subset \mathbb{R}^3$, se define el *centro de masas* de C como el punto (x_0, y_0, z_0) de coordenadas:

$$(18) \quad x_0 = \frac{\int_C xf}{m(C)}, \quad y_0 = \frac{\int_C yf}{m(C)}, \quad z_0 = \frac{\int_C zf}{m(C)},$$

donde $m(C)$ es la masa de C , como en (15). Si el cuerpo fuera plano, se definiría igual, pero con dos coordenadas solamente.

Los momentos se enuncian de manera distinta en dos y tres dimensiones, así que subdividimos la sección en estos dos casos.

6.1. Momentos en dimensión 2. Dado un conjunto acotado medible C en \mathbb{R}^2 y una función $f(x)$ no negativa, se definen los *momentos estáticos*

del cuerpo C con densidad $f(x)$ ⁷ con respecto a los ejes coordenados como

$$(19) \quad M_x = \int_C yf(x, y) dx dy, \quad M_y = \int_C xf(x, y) dx dy.$$

Está claro, de las definiciones anteriores que, si (x_0, y_0) es el centro de masas del cuerpo, entonces

$$x_0 = \frac{M_y}{m(C)}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m(C)}$$

donde $m(C)$ es la masa de C .

6.2. Momentos en dimensión 3. Dado un conjunto acotado medible C en dimensión 3, y una función $f(x)$ integrable y no negativa en C , se define:

Momentos estáticos: los momentos estáticos de C respecto de los planos xy , xz e yz son, respectivamente:

$$(20) \quad M_{xy} = \int_C zf, \quad M_{xz} = \int_C yf, \quad M_{yz} = \int_C xf.$$

Momentos de inercia respecto a ejes: los momentos de inercia de C respecto de los ejes x , y y z se definen, respectivamente como

$$(21) \quad I_x = \int_C (y^2 + z^2)f, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2)f, \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2)f.$$

Momento de inercia respecto al origen: el momento de inercia respecto del origen se define como

$$(22) \quad I_O = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)f$$

Momentos respecto a planos: los momentos de inercia respecto de los planos coordenados son, respectivamente

$$(23) \quad I_{xy} = \int_C z^2f, \quad I_{xz} = \int_C y^2f, \quad I_{yz} = \int_C x^2f.$$

6.3. Áreas y volúmenes. Las integrales que hemos definido nos deben servir, como es obvio, para calcular áreas y volúmenes, también. La integral doble se puede utilizar para calcular áreas de figuras planas (esta es la definición de *volumen* de un conjunto acotado medible), pero también para calcular volúmenes de figuras delimitadas por el gráfico de una función definida en un conjunto acotado medible de \mathbb{R}^2 . En concreto

NOTA 6.1. Si C es un conjunto acotado medible de \mathbb{R}^2 y $f(x, y)$ es una función integrable en C , el volumen encerrado entre el plano (x, y) y la gráfica de la función es

$$\int_C f(x, y) dx dy$$

⁷Se dirá “momento de C ”, sobreentendiendo que se le dota a C de la densidad $f(x)$.

igual que el área encerrada entre el eje OX y la gráfica de una función de una variable $f(x)$.

Para calcular el área de un conjunto acotado medible C de \mathbb{R}^2 , no hay más que (como se definió en la página 37) calcular la integral sobre C de la función constante 1:

$$\text{area}(C) = \int_C dx dy.$$

Para calcular el volumen de un sólido en \mathbb{R}^3 (es decir, de un conjunto acotado medible C), se realiza la misma operación en dimensión 3:

$$\text{vol}(C) = \int_C dx dy dz.$$

7. Problemas y ejemplos

CAPÍTULO 3

Campos Vectoriales, curvas, superficies. . .

NOTA (Curso 2008-2009). *Esta parte de los apuntes es mucho menos detallada y precisa de lo que debería, por necesidades de disponibilidad y por falta de tiempo para redactarla correctamente (es un tema demasiado delicado como para hacer unas notas de prisa y corriendo con pretensiones de precisión).*

En este capítulo se introduce muy sucintamente la teoría de campos de vectores en el plano y en el espacio, con el objetivo de enunciar el Teorema de Stokes 65, que es quizá la aplicación más importante de todo el curso, junto con sus consecuencias (el Teorema de Gauss, principalmente). La integración de campos en curvas y superficies es el contexto en el que el teorema de Stokes se encuadra, pero también posee interés en sí misma, como aplicación de las integrales múltiples al cálculo de masas (y, por ende, de longitudes y áreas) y momentos.

En todos los enunciados habrá probablemente imprecisiones teóricas (aunque procuraremos evitarlas), pero ha de tenerse en cuenta que el objetivo del curso es más práctico que teórico y que posiblemente ninguna de esas imprecisiones ocurra en los ejemplos que el alumno pueda encontrarse en el futuro (p.ej. todas las consideraciones podrían hacerse para campos de tipo \mathcal{C}^2 , pero vamos a hacerlas para campos \mathcal{C}^∞ y vamos a suponer que todas las fronteras de los conjuntos son *mínimamente normales*, es decir, *analíticas a trozos*, por no decir *semialgebraicas*).

1. Curvas

Comenzamos con el estudio de las curvas.

DEFINICIÓN 1.1. Una *curva* en \mathbb{R}^3 (ó \mathbb{R}^2 , pero de aquí en adelante utilizaremos siempre \mathbb{R}^3 e identificaremos \mathbb{R}^2 con el plano $z = 0$) es una aplicación de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Se denota γ , $\gamma(t)$ o bien $(x(t), y(t), z(t))$. Se supondrá de aquí en adelante que las “ecuaciones” de las coordenadas son funciones con derivadas de todos los órdenes.

Una curva tiene asociada una colección de objetos que pasamos a enumerar:

DEFINICIÓN 1.2. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cuyas ecuaciones son $(x(t), y(t), z(t))$, se define:

- La *trayectoria* de γ es el conjunto Γ dado por el recorrido de la aplicación γ ; es decir, $\Gamma = \gamma([a, b])$.
- El *vector tangente* a γ en un punto $(x(t), y(t), z(t))$ es el vector $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ donde

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

En general, el vector tangente a una curva se denota siempre $d\bar{s}$ y se puede llamar también *elemento de longitud* de una curva.

- La *velocidad* de una curva γ en un punto $(x(t), y(t), z(t))$ es la norma (longitud) del vector tangente:

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

que es la *longitud recorrida en un tiempo diferencial*, si se supone que t es “el tiempo”.

Vamos a utilizar las siguientes nociones en el futuro:

DEFINICIÓN 1.3. Una curva γ se dice *simple* si es *inyectiva* (es decir, si no pasa dos veces por el mismo punto).

DEFINICIÓN 1.4. Una curva γ es *cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$, es decir si el punto inicial y el final coinciden. Una curva cerrada también se puede denominar *ciclo*.

DEFINICIÓN 1.5. Una curva γ se dice que es *cerrada simple* si es una curva cerrada y γ es inyectiva en $[a, b)$.

Con estos conceptos se puede ya comenzar a hacer algunos cálculos interesantes. Supongamos que $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que toma valores en la trayectoria de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La *integral de línea* corresponde a la idea de integrar a lo largo de la trayectoria de γ , no solo de intervalos en \mathbb{R} :

DEFINICIÓN 1.6. La *integral de línea* de f a lo largo de γ se define como la integral en $[a, b]$ de la función “retrotraída” al intervalo ponderada por la velocidad:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) ds = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \end{aligned}$$

Si γ es una curva cerrada (un ciclo), se suele denotar la integral de línea como

$$\oint_{\gamma} f$$

Como es obvio, la integral de línea de una función constante corresponde a la idea de *masa* de la curva suponiendo que la densidad lineal es dicha constante. Como la masa es la curva coincide con su longitud si la densidad es uno, se puede definir

DEFINICIÓN 1.7. La *longitud* de una curva es la integral de línea de la función constante 1 sobre la curva:

$$\text{long}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Y, por otro lado

DEFINICIÓN 1.8. Dada una función $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, se define la *masa* de la curva γ (o, equivalentemente de Γ) de densidad f como la integral de f a lo largo de γ :

$$\text{masa}(\gamma) = \int_{\gamma} f ds,$$

que no es más que la “suma de todas las densidades por unidad de longitud”.

2. Superficies

La noción de superficie se corresponde con la de aplicación de un *abierto* de \mathbb{R}^2 en el espacio.

DEFINICIÓN 2.1. Una superficie es una aplicación $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R}^3 cuyas ecuaciones

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

son diferenciables un número infinito de veces. El recorrido de la superficie (es decir, el conjunto $T(D)$ imagen del abierto D en \mathbb{R}^3 , la *superficie* “en sí”) se denotará $|T|$ o bien con la letra S .

Igual que las curvas, las superficies tienen asociado un vector, que en este caso es *normal* (no tangente):

DEFINICIÓN 2.2. Dada una superficie $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, el *vector normal* a T en cada punto $T(u, v)$ es el vector

$$d\bar{S} = \bar{T}_u \times \bar{T}_v du dv$$

donde \bar{T}_u y \bar{T}_v son, respectivamente, el “vector tangente en la dirección u ” y el “vector tangente en la dirección v ”:

$$\bar{T}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \bar{T}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

y \times representa el producto vectorial.

Así que el vector normal, en coordenadas, se escribe en cada punto $T(u, v)$ como

$$d\bar{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Su norma (es decir, la raíz cuadrada de su módulo al cuadrado) se denota siempre dS .

Con este concepto se puede ya definir la integral de una función sobre una superficie:

DEFINICIÓN 2.3. Dada una superficie $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de recorrido S y una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, se define la *integral de superficie* de f sobre T (o sobre S) como la integral de f “retrotraída a D ” según T :

$$\begin{aligned} \iint_S f &= \int_D f(T(u, v)) dS = \\ &= \int_D f(T(u, v)) \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv \end{aligned}$$

donde la última integral es una integral doble en D .

Si $f(x, y, z)$ se entiende como una *densidad*, entonces la definición que acabamos de dar es

DEFINICIÓN 2.4. La *masa* de la superficie S con densidad f es la integral de superficie de f en S .

Y, puesto que el área coincide con la masa cuando la densidad es 1:

DEFINICIÓN 2.5. El *área* de S es la integral de superficie de la función 1 en S :

$$area(S) = \iint_S dS = \int_D \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv$$

A veces, al vector normal $\|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\|$ se le denota por \bar{n} .

3. Campos de vectores y su integración

Comenzamos el estudio sistemático de los *campos de vectores*, para lo cual primero los definimos

DEFINICIÓN 3.1. Un *campo de vectores* en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación $\bar{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vamos a asumir en todo momento que los campos de vectores tienen coordenadas diferenciables un número arbitrario de veces salvo quizá en un subconjunto *pequeño*.

Ha de entenderse un campo de vectores como una *flecha* que, por lo general, indicará una *fuerza* ó una *velocidad* en cada punto del espacio (la fuerza ejercida por el campo gravitatorio sobre una unidad de masa o la velocidad de una partícula que se mueve en un lugar del espacio...). El

que las coordenadas de la aplicación \bar{F} sean diferenciables no es más que un requerimiento técnico para facilitar todo el estudio (si no fuera así, la técnica sería mucho más compleja).

El primer concepto *integral* relativo a un campo es el de *integral* a lo largo de una trayectoria, que puede entenderse (es quizá la noción más natural) como el *trabajo* ejercido por un campo F al moverse una partícula siguiendo una curva. Dado un campo \bar{F} en \mathbb{R}^3 (lo mismo vale para \mathbb{R}^2) y una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, si escribimos el campo $\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$, se define

DEFINICIÓN 3.2. La *integral de línea* de \bar{F} a lo largo de γ es la integral en $[a, b]$ del producto escalar de \bar{F} con el vector velocidad:

$$\int_{\gamma} \bar{F} = \int_a^b \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

(recuérdese que $d\bar{s}$ denota el vector velocidad de γ) que, en coordenadas se escribe (en \mathbb{R}^3):

$$\int_{\gamma} \bar{F} = \int_a^b F_1 dx + \int_a^b F_2 dy + \int_a^b F_3 dz$$

que, a su vez, no es más que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{F} &= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) dt + \\ &+ \int_a^b F_2(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) dt + \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) dt \end{aligned}$$

Como se ve, si la curva γ es perpendicular a \bar{F} en todos los puntos, el campo no realiza ningún trabajo, mientras que si γ tiene la misma dirección que \bar{F} , el trabajo es máximo ó mínimo, dependiendo del sentido. Nótese que es el trabajo *realizado por el campo*. Finalmente, es un buen ejercicio comprobar que *el trabajo realizado no depende de la velocidad*: si $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es otra parametrización simple de la misma curva Γ , y $d\tilde{s}$ es su elemento de velocidad, entonces

$$\int_{\tilde{\gamma}} \bar{F} d\tilde{s} = \int_{\gamma} \bar{F} d\bar{s}$$

suponiendo que γ también era simple (este resultado no es más que un cambio de variable).

Ejemplo 23. Si \bar{F} es el campo de velocidades de un fluido y γ es un ciclo (una curva cerrada), se denomina *circulación* de \bar{F} a la integral

$$\oint_{\gamma} \bar{F} d\bar{s}$$

Ejemplo 24. La intersección de una esfera con un cilindro de radio mitad y que pasa por el centro de la esfera se denomina *bóveda de Viviani*.

La otra noción clave es la que relaciona un campo de vectores con una superficie: el *flujo*. Supongamos que \vec{F} es un campo de vectores en \mathbb{R}^3 y S es una superficie (es decir, S es la imagen de $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde D es un abierto de \mathbb{R}^2). Entonces

DEFINICIÓN 3.3. El *flujo* de \vec{F} a lo largo de S es la integral del producto escalar de \vec{F} por el vector normal \vec{n} a S :

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_D \vec{F} \cdot \|T_u \times T_v\| \, du \, dv$$

Como se ve, si el campo tiene la misma dirección que el vector normal, el flujo es *positivo*, mientras que si tiene dirección opuesta, el flujo es *negativo*. Este es uno de los lugares en que la *orientación* del vector normal es importante.

3.1. El operador Nabla. Por lo general, los campos de vectores que se encuentran en Física no son cualesquiera, y los problemas de campos de vectores relacionan unos con otros. Existe un “operador” que se utiliza mucho (aunque no sea más que un artificio de notación) para construir campos a partir de otros campos o de funciones escalares, el *operador Nabla* (con la notación i, j, k para los vectores coordenados):

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

DEFINICIÓN 3.4. Supongamos que f es una función en \mathbb{R}^3 y que \vec{F} es un campo de vectores en \mathbb{R}^3 . Se definen:

- El *gradiente* de f es el campo de vectores dado por

$$\nabla f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- El *rotacional* del campo \vec{F} es el producto vectorial de ∇ por \vec{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) k \end{aligned}$$

- Y, finalmente, la *divergencia* de un campo de vectores \vec{F} es un campo escalar (es decir, una función), producto escalar del operador nabla con \vec{F} :

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Cada uno de los campos definidos arriba representa, hasta cierto punto, un concepto físico:

El gradiente: indica la dirección (e intensidad) de la máxima pendiente de las superficies de nivel de una función. La dirección del gradiente es normal (perpendicular) a dichas superficies de nivel.

El rotacional: indica la *tendencia* al giro de un campo de vectores cuando este se interpreta como la velocidad en cada punto de un fluido. Si en un punto se ubicara una esfera “muy pequeña”, esta giraría (o no) según la forma del campo de vectores. El eje de giro viene indicado por el rotacional y la velocidad angular es la mitad del módulo.

La divergencia: indica la *tendencia a expandirse o comprimirse* de un campo de vectores, cuando este se interpreta como un campo de velocidades de un fluido. Cuanto más positiva es la divergencia, más tiende el fluido a “expandirse” (salir) del punto, cuanto más negativa, más tiende el fluido a “comprimirse” (entrar) en el punto. Otra manera de visualizarlo es como el cambio (con el signo opuesto) de densidad (si un fluido se comprime, la densidad aumenta, si un fluido se expande, la densidad disminuye). Los fluidos incompresibles se mueven según trayectorias sin divergencia.

Un campo de vectores cuyo rotacional es cero se denomina *irrotacional* y uno cuya divergencia es cero se denomina *incompresible* ó *solenoidal*.

Hay dos igualdades fundamentales:

TEOREMA. *Los campos gradientes no giran y los campos rotacionales son incompresibles:*

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla f &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= 0\end{aligned}$$

4. Anexo topológico

Antes de continuar necesitamos algunas nociones muy básicas de *topología*, solo para poder enunciar los resultados con precisión, sin pretender que estos conceptos sean importantes, pues al final el alumno siempre va a trabajar con conjuntos “bien delimitados” (como en la página 40), o por conjuntos delimitados por curvas muy sencillas. En cualquier caso, pensamos que el esfuerzo por entender estos conceptos merece la pena.

Quizás la noción más importante de todas es la de *conjunto abierto*, que corresponde a la idea intuitiva de conjunto cuyos puntos están “bien contenidos”:

DEFINICIÓN 4.1. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *abierto* si cualquier punto $x \in A$ tiene una “bola” alrededor totalmente contenida en A . Es decir, si para cualquier $x \in A$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$$

está contenido en A :

$$B_\varepsilon(x) \subset A.$$

Es fácil comprender un poco mejor la noción de conjunto abierto si se tiene en cuenta lo siguiente:

NOTA 4.2. Cualquier conjunto definido por *desigualdades estrictas* de funciones continuas es un abierto.

Ejemplo 25. Por tanto, los siguientes conjuntos son abiertos:

- Los semiespacios $ax + by + cz + d > 0$, para cualesquiera a, b, c y d .
- Los “cubos” abiertos: $(a, b) \times (c, d) \times (e, f)$.
- Las *esferas*: $B_r(x)$ definidas como arriba.

Además, se tiene que

TEOREMA. *Cualquier unión de abiertos es un abierto y las intersecciones finitas de abiertos son abiertas.*

La segunda noción importante es la de *frontera*: los puntos que están “cerca” de un conjunto y de su complementario.

DEFINICIÓN 4.3. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, la *frontera* de A , denotada ∂A es el conjunto de puntos tales que cualquier bola centrada en ellos contiene a un punto de A y uno que no es de A (del complementario de A , que se denota A^c).

Por lo general, si A es un abierto definido por una desigualdad, la frontera de A se corresponde con el conjunto definido por “la igualdad”:

Ejemplo 26. Se tiene:

- La frontera de una bola es la esfera “externa”: si A es la bola $B_\varepsilon(x)$, entonces $\partial A = S_\varepsilon(x)$, donde

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| = \varepsilon\}.$$

- La frontera de un semiespacio es un plano: si A es el semiespacio $ax + by + cz + d > 0$, entonces ∂A es el plano $ax + by + cz + d = 0$.

Aunque la siguiente noción se suele utilizar en otros contextos, pensamos que es óptima para enunciar con precisión los teoremas siguientes.

DEFINICIÓN 4.4. Diremos que un abierto A está *bien contenido* en otro abierto B si B incluye a A y a la frontera de A . Es decir, si cualquier punto “muy cercano” a A está en B . Si A está bien contenido en B , se escribirá $A \sqsubset B$.

La noción anterior es útil para lo siguiente, que no es más que la definición correcta de “función diferenciable en un abierto y en su frontera”:

DEFINICIÓN 4.5. Sea A un abierto de \mathbb{R}^n . Diremos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable un número k de veces con continuidad está *definida fuertemente en A* si existen un abierto B tal que $A \sqsubset B$ y una función

$\tilde{f} : B \rightarrow \mathbb{R}$ de un abierto B a \mathbb{R} que es diferenciable un número k de veces con continuidad, que coincide con f en A .

Un campo de vectores $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ está *definido fuertemente en A* si cada componente F_i lo está. Lo mismo una aplicación $T : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Finalmente,

DEFINICIÓN 4.6. Un *dominio de Stokes* es un abierto A tal que su frontera ∂A es una *unión finita* de curvas cerradas simples.

5. El teorema de Stokes

Todas las definiciones y propiedades anteriores se orientan al que posiblemente sea el resultado más profundo de todo este curso, el Teorema de Stokes, que relaciona el flujo del rotacional de un campo de vectores a través de una superficie con el trabajo realizado por el campo en el borde de la superficie. Comenzamos por un lema algo más simple: el Teorema de Green, pero previamente necesitamos hablar algo de *bordes* de superficies, aunque lo haremos solo en el contexto en que trabajaremos siempre.

A partir de ahora, si D es un dominio de Stokes y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una de las curvas del borde, diremos que γ *está bien orientada* si D queda a la izquierda del vector tangente a γ . Si no se especifica lo contrario, cada vez que se tome una curva del borde de un dominio de Stokes, se supondrá que *está bien orientada*. En cualquier caso, si C es la imagen de γ , se denotará C^+ a la curva *bien orientada* y C^- a la curva orientada negativamente.

Enunciamos el resultado primero que se conoció, aunque es el menos informativo:

TEOREMA 5.1 (de Green). *Sea D un dominio de Stokes cuyo borde se supone que es la imagen de una sola curva cerrada simple (llamémosla C al borde). Sean P y Q dos funciones de \mathbb{R}^2 diferenciables. Entonces*

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

(Nótese que la primera integral es sobre una curva y la segunda sobre un dominio entero, i.e. una superficie).

En realidad, este resultado no es más que una sencilla consecuencia del siguiente, que es el realmente importante para superficies:

TEOREMA 5.2 (de Stokes). *Sea D un dominio de Stokes y C_1, \dots, C_n las curvas cerradas que determinan su borde. Sea $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie definida fuertemente en D tal que su borde es la imagen de $C_1 \cup \dots \cup C_n$ por una extensión de T . Supongamos que \bar{F} es un campo de vectores en \mathbb{R}^3 . Entonces*

$$\iint_S \nabla \times \bar{F} d\bar{S} = \int_{\partial S} \bar{F} d\bar{s}$$

donde S es la superficie definida por T y $d\bar{s}$ denota el elemento de longitud en cada componente del borde de S , ∂S .

En definitiva, para conocer el flujo de un rotacional, basta calcular el trabajo del campo original en el borde.

Para volúmenes, se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 5.3 (de Gauss o de la Divergencia). *Supongamos que Ω es un abierto de \mathbb{R}^3 y que $\partial\Omega$ es una superficie orientada que es unión finita de las imágenes de superficies $T_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea \bar{F} un campo vectorial infinitamente diferenciable fuertemente definido en Ω . Entonces*

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \bar{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \bar{F} \, d\bar{S}$$

o dicho de otra forma,

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{F}) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \bar{F} \cdot \bar{n} \, dS$$

donde \bar{n} es el vector normal a $\partial\Omega$.

Lo que quiere decir la igualdad anterior es que para calcular la “divergencia total” de un campo en un volumen, basta calcular el flujo del campo por el borde (la cantidad total de entrada y salida de un campo en un volumen se sabe en el borde y es precisamente el flujo).

La *orientación* que se toma para la superficie respecto del volumen es la que deja el vector normal “hacia el exterior” del volumen.

6. Consecuencias y otras propiedades

Quizás la consecuencia física más clara del Teorema de Stokes es la propiedad de los gradientes de ser conservativos.

DEFINICIÓN 6.1. Un campo de vectores \bar{F} , fuertemente definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice *conservativo* si el trabajo realizado por el campo no depende de la trayectoria. Es decir, si γ_1 y γ_2 son dos curvas que unen los puntos P y Q , entonces

$$\int_{\gamma_1} \bar{F} \, d\bar{s}_1 = \int_{\gamma_2} \bar{F} \, d\bar{s}_2$$

donde $d\bar{s}_1$ y $d\bar{s}_2$ son los elementos de longitud (vectores tangentes ó velocidades) correspondientes a γ_1 y γ_2 respectivamente.

Es sencillo probar que si A es un abierto tal que dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante una curva, entonces

TEOREMA 6.2. *Si $\bar{F} = \nabla f$ es el gradiente de f en A , entonces \bar{F} es conservativo.*

Pero no solo ocurre esto, sino también que

TEOREMA 6.3. *Supongamos que \bar{F} está fuertemente definido en un abierto conexo $A \subset \mathbb{R}^n$ y es conservativo. Entonces existe una función (que se denomina potencial) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{F} = \nabla f$.*

Ahora bien, la propiedad “irrotacional” de los campos de vectores gradientes es *casi* suficiente, pero no del todo. . .

Ejemplo 27. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el “tubo” $1 < x^2 + y^2 < 2$ y sea \bar{F} el campo de vectores fuertemente definido en S por las ecuaciones

$$\bar{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Este campo tiene rotacional 0 pero *no es conservativo* (y por tanto no es el gradiente de una función), pues la integral en cualquier camino cerrado que “rodee” al borde interior es 2π .

El problema del ejemplo anterior es que el tubo es un conjunto abierto que *no es simplemente conexo*: hay curvas cerradas simples que no se pueden “deformar” dentro del conjunto hasta convertirlas en un punto.

El caso es que eso no ocurre en \mathbb{R}^3 cuando se le quitan unos pocos puntos:

TEOREMA 6.4. *Si \bar{F} es un campo de vectores definido en \mathbb{R}^3 salvo quizá en un número finito de puntos, entonces son equivalentes:*

- \bar{F} es conservativo.
- Para cualquier curva cerrada simple γ , se tiene

$$\oint_{\gamma} \bar{F} = 0$$

- Existe una función f definida en \mathbb{R}^3 salvo quizá un número finito de puntos tal que $\bar{F} = \nabla f$.
- \bar{F} es irrotacional: $\text{rot } \bar{F} = 0$.

Este resultado *no es cierto en \mathbb{R}^2* , pues si al plano se le quita una cantidad finita de puntos, resulta un conjunto que *no es simplemente conexo* (hay curvas cerradas simples que no se pueden contraer a “puntos”). El resultado para el plano es el siguiente

TEOREMA 6.5. *Sea \bar{F} un campo vectorial definido en \mathbb{R}^2 salvo en un número finito de puntos. Entonces*

- (1) *Para cualquier curva γ cerrada simple se tiene*

$$\oint_{\gamma} \bar{F} d\bar{s} = 0$$

si y solo si el campo es conservativo.

- (2) *Si se tiene la igualdad anterior para cualquier curva cerrada simple, entonces \bar{F} es el gradiente de alguna función f , es decir $\bar{F} = \nabla f$.*

Referencias

1. M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Reverté, 1988.